ИСТОРИЧЕСКІЙ ОБЗОРЪ

ПРОИСХОЖДЕНІЯ и РАЗВИТІЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ МЕТОДОВЪ.

СОЧИНЕНІЕ

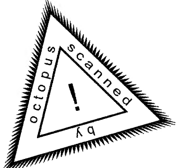
ШАЛЯ.

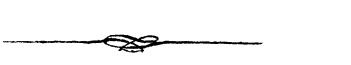
(Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne; par *M. Chasles*. Bruxelles, 1837.)

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО.

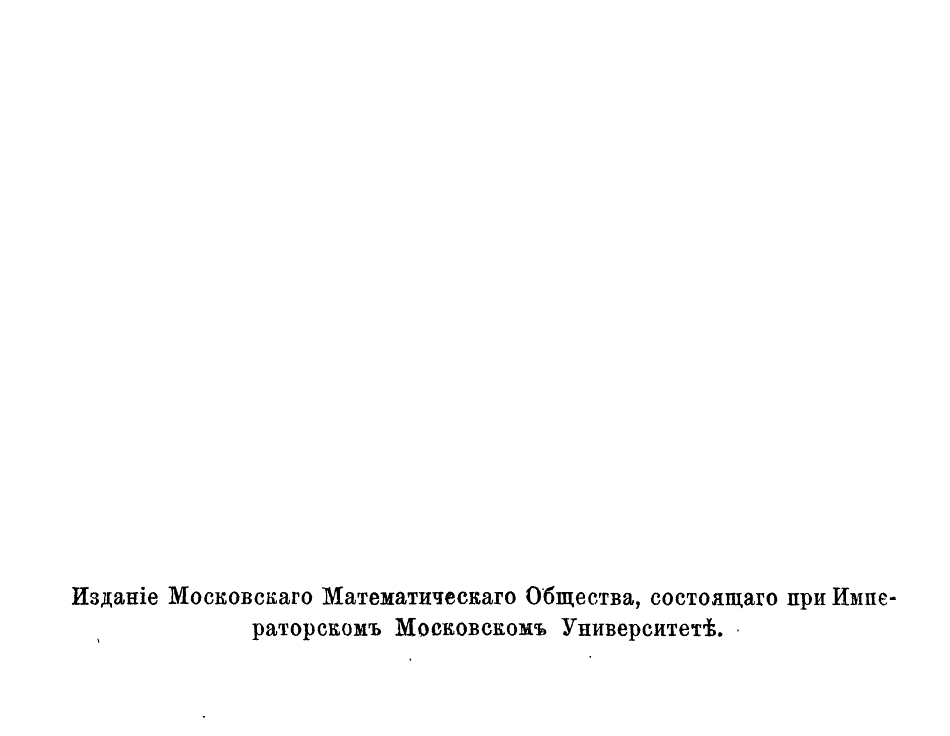
Томъ I.

ИСТОРІЯ ГЕОМЕТРІИ.





МОСКВА.
Въ Университетской типографіи (М. Катковъ),
на Страстномъ бульварѣ.
1883.



Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.

ПРЕДИСЛОВІЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ *).

Сочиненіе это было вызвано задачей, предложенной Брюссельскою Академіею. Первоначально оно состояло только изъ двухъ мемуаровъ, представленныхъ Академіи въ декабрѣ 1829 года и сопровождавшихся очень короткимъ введеніемъ. Когда Академія опредѣлила напечатать этотъ трудъ, я рѣшился расширить введеніе и присоединить къ нему сверхъ того въ видѣ примѣчаній результаты нѣкоторыхъ изысканій, относящихся къ тому же предмету. Сперва я медлилъ выполненіемъ этого намѣренія, а потомъ окончаніе работы было задержано собственно историческими изысканіями, при которыхъ обнаружились различные темные вопросы, не предвидѣнные прежде; однако окончить свой трудъ я считалъ долгомъ передъ Академіей въ виду дружескихъ настояній ея знаменитаго безсмѣннаго секретаря г. Кетле. Печатаніе началось въ 1835 году, сначала безъ остановокъ и довольно быстро, но вскорѣ замедлилось главнымъ образомъ по причинѣ изученія индѣйскихъ сочиненій Брамегупты, которыхъ настоящее содержаніе и особая важность геометрическаго отдѣла тогда не были еще извѣстны. Сочиненіе появилось наконецъ въ 1837 году.

---

*) Редакція Математическаго Сборника начала въ 1871 году печатаніе перевода Исторіи Геометріи Шаля главнымъ образомъ въ виду того, что не только французскій подлинникъ этого сочиненія (1837), но и нѣмецкій переводъ Зонке (*Geschichte der Geometrie von Chasles*, übertragen durch Dr. Sohncke, Halle; 1839), сдѣлались библіографическою рѣдкостью. Весь русскій переводъ былъ уже сдѣланъ и болѣе половины напечатано, когда появилось второе французское изданіе безъ всякихъ перемѣнъ.

Въ послѣднее время Академія пожелала издать его вновь. Но мое здоровье и разные запоздалые труды, корректуры которыхъ лежатъ у меня уже цѣлые годы, не дали мнѣ возможности принять участіе въ этомъ перепечатаніи. Мой другъ Каталанъ, профессоръ Люттихскаго университета, былъ такъ добръ, что замѣнилъ меня при пересмотрѣ корректуръ; прошу его благосклонно принять отъ меня за это самую искреннюю благодарность.

Представлялось и другое препятствіе. Съ 1837 года геометрія сдѣлала значительные успѣхи, перечисленные въ одномъ изъ отчетовъ, представленныхъ во время министертва почтеннаго Дюрюи и по его предложенію. Обстоятельство это дѣлало очень сомнительнымъ успѣхъ сочиненія, устарѣвшаго уже почти на сорокъ лѣтъ. Но Hayez, содержатель типографіи Брюссельской Академіи, и Gauthier-Villars, пожелавшій къ нему присоединиться, захотѣли выполнить мысль Академіи. Пусть и они примутъ также выраженіе моей благодарности.

Парижъ, 20 мая 1875 г.

ИСТОРІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Въ этомъ сочиненіи мы намѣрены изложить краткое обозрѣніе важнѣйшихъ открытій, благодаря которымъ чистая геометрія достигла своего современнаго развитія, и преимущественно тѣхъ изъ нихъ, которыми были подготовлены новѣйшіе методы.

Ниже будетъ указано, какіе изъ этихъ методовъ находятся, по нашему мнѣнію, въ ближайшей связи съ многочисленными новыми теоремами, обогатившими науку въ послѣднее время.

Въ концѣ мы разъясняемъ сущность и философскій характеръ двухъ основныхъ геометрическихъ принциповъ, составляющихъ главный предметъ нашихъ мемуаровъ.

Мы раздѣлили исторію геометріи на пять эпохъ. Читатель по прочтеніи книги можетъ судить, оправдывается ли это раздѣленіе тѣми особыми чертами, которыя мы признали отличительными для каждой эпохи.

Къ этому историческому обзору прибавлены многія примѣчанія. Одни изъ нихъ назначены для болѣе подробнаго развитія такихъ вопросовъ, о которыхъ въ самомъ изложеніи говорится только вкратцѣ; другія заключаютъ въ себѣ нѣкоторыя историческія подробности, помѣщать которыя на ряду съ важнѣйшими фактами казалось намъ неудобнымъ, такъ какъ ихъ объемъ могъ бы затруднять чтеніе; наконецъ многія изъ примѣчаній суть плоды нашихъ собственныхъ изслѣдованій о различныхъ предметахъ, относящихся къ разсматриваемымъ здѣсь геометрическимъ теоріямъ; эти примѣчанія представляютъ можетъ быть нѣкоторые новые результаты.

Ихъ не было бы необходимости помѣщать здѣсь, еслибы въ этомъ трудѣ мы имѣли въ виду только одну историческую цѣль. Но, говоря о развитіи геометріи и описывая открытія и новыя

ученія, возникающія въ ней, мы главнымъ образомъ желали на нѣкоторыхъ примѣрахъ показать, что характеръ этихъ новыхъ ученій состоитъ въ стремленіи вносить новыя упрощенія во всѣ части науки о протяженіи и новыя средства для достиженія одного, до сихъ поръ еще неизвѣстнаго, обобщенія всѣхъ геометрическихъ истинъ; это же стремленіе было свойственно и анализу, когда онъ прилагался къ геометріи. Изъ нашего обзора мы заключаемъ, что могущественные пріемы, пріобрѣтенные геометріею въ послѣднія тридцать лѣтъ, во многихъ отношеніяхъ могутъ сравниться съ аналитическими способами и что они отнынѣ могутъ соперничать съ ними въ весьма многочисленныхъ вопросахъ нашей науки.

Эта мысль будетъ повторена —мы желали бы сказать подтверждена—во многихъ мѣстахъ, потомучто ею собственно и вызвано самое сочиненіе и она постоянно руководила насъ при долгихъ изысканіяхъ, которыя были необходимы и для исторической части, и для примѣчаній, и для двухъ мемуаровъ.

Но чтобы устранить всякое несправедливое толкованіе нашихъ намѣреній и мнѣній относительно обоихъ методовъ, присущихъ математическимъ наукамъ, мы спѣшимъ заявить, что наше удивленіе къ современному могуществу аналитическаго способа не имѣетъ границъ и что мы не во всѣхъ вопросахъ ставимъ на ряду съ нимъ способъ геометрическій. Но мы убѣждены, что при изысканіи математическихъ истинъ не можетъ быть избытка въ средствахъ изслѣдованія; всѣ истины могутъ сдѣлаться одинаково простыми и наглядными, если только мы найдемъ къ нимъ прямой, свойственный имъ и естественный путь; вотъ почему мы считали не безполезнымъ, насколько намъ это позволяли наши слабыя средства, показать, что пріемы чистой геометріи очень часто и во множествѣ вопросовъ представляютъ именно этотъ простой и естественный путь, проникающій въ самую сущность истинъ, обнаруживающій таинственныя связи, соединяющія ихъ между собою,—путь, ведущій къ самому ясному и полному пониманію ихъ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПЕРВАЯ ЭПОХА.

1. Геометрія получила начало у Халдеевъ и Египтянъ.

Финикіянинъ **Ѳалесъ** (639-548 до Р. Х.) ѣздилъ учиться въ Египетъ и, поселившись потомъ въ Милетѣ, основалъ Іонійскую школу, въ которой образовались греческіе философы и началось первое развитіе геометріи.

Пиѳагоръ Самосскій (род. 580 до Р. Х.), ученикъ Ѳалеса, подобно ему, сперва отправился въ Египетъ, а потомъ въ Индію; возвратившись въ Италію, онъ основалъ здѣсь свою школу, которая сдѣлалась гораздо знаменитѣе той, изъ которой онъ произошелъ самъ. Этому философу, сдѣлавшему изъ геометріи часть своей философіи, и его ученикамъ преимущественно принадлежатъ первыя открытія въ геометріи; самыя важныя изъ нихъ: теорія *несоизмѣримости* нѣкоторыхъ линій, напр. діагонали квадрата съ его стороною, и теорія *правильныхъ тѣлъ*. Впрочемъ первые успѣхи науки о протяженіи состояли только изъ нѣсколькихъ простѣйшихъ предложеній о прямой линіи и кругѣ. Между ними наиболѣе замѣчательны: теорема *о квадратѣ гипотенузы* прямоугольнаго треугольника (за открытіе которой, по сказанію исторіи, или басни, Пиѳагоръ принесъ въ жертву гекатомбу) и то свойство круга и шара, что они изъ всѣхъ фигуръ одинаковаго периметра или одинаковой поверхности суть *наибольшія*; эта послѣдняя теорема содержитъ въ себѣ первый зачатокъ ученія объ *изопериметрахъ*.

2. Геометрія оставалась въ такомъ ограниченномъ видѣ до основанія Платоновой школы, которое было эпохою болѣе важныхъ открытій.

Платонъ (430-347 д. Р. Х.). Чтобы изучить математику, Платонъ, подобно своимъ предшественникамъ, отправился сперва къ египетскимъ жрецамъ, а потомъ въ Италію къ пиѳагорейцамъ. Возвратившись въ Аѳины, онъ сталъ во главѣ новой школы и ввелъ

въ геометрію *аналитическій методъ* [1]), *коническія сѣченія* и ученіе о *геометрическихъ мѣстахъ*. Эти замѣчательныя открытія сдѣлали изъ геометріи какъ бы новую науку въ сравненіи съ существовавшей до этихъ поръ элементарной геометріей, науку высшую, которая учениками Платона названа была *трансцендентною геометріей*.

Съ этого времени стали прилагать съ замѣчательнымъ искусствомъ ученіе о геометрическихъ мѣстахъ [2]) къ рѣшенію знаменитыхъ задачъ объ *удвоеніи куба*, о *двухъ среднихъ пропорціональныхъ* и о *дѣленіи угла на три равныя части*.

Первая изъ этихъ задачъ, извѣстная по своей трудности и по своему баснословному происхожденію, занимала геометровъ еще прежде этого времени.

Гиппократъ Хіосскій (около 450 до Р.Х.), достаточно извѣстный квадратурою своихъ *луночекъ*, привелъ задачу о удвоеніи куба къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ между стороною

---

[1]) Вьетъ, въ началѣ своего сочиненія «*Isagoge in artem analyticem*», даетъ слѣдующее объясненіе анализа и синтеза, вполнѣ характеризующее оба эти метода древнихъ: «Въ математикѣ существуетъ способъ изслѣдованія истины, изобрѣтеніе котораго приписывается Платону; Теонъ назвалъ его анализомъ и опредѣлилъ слѣдующимъ образомъ: мы разсматриваемъ искомое, какъ извѣстное, и переходимъ отъ слѣдствія къ слѣдствію до тѣхъ поръ, пока не убѣдимся въ истинѣ искомаго. Синтезъ же состоитъ въ томъ, что, исходя отъ извѣстнаго, мы, путемъ отъ слѣдствія къ слѣдствію, приходимъ къ открытію искомаго.»

[2]) Мѣстомъ въ геометріи называется послѣдовательность точекъ, изъ которыхъ каждая рѣшаетъ предложенную задачу, или каждая обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ, не принадлежащимъ никакой точкѣ, взятой внѣ этого мѣста. Древніе подраздѣляли геометрическія мѣста на различные роды. Они называли прямую линію и кругъ плоскими мѣстами, потомучто ихъ прямо чертили на плоскости; тѣлесными мѣстами назывались коническія сѣченія, потомучто они получались на тѣлѣ (конусѣ); наконецъ линейными мѣстами назывались всѣ кривыя высшихъ порядковъ, какъ конхоиды, циссоиды, спирали и квадратриксы. Мѣстною теоремою называлась такая теорема, въ которой доказывалось, что послѣдовательность точекъ прямой или кривой линіи удовлетворяетъ даннымъ условіямъ вопроса, и мѣстною задачею,—задача, въ которой требовалось найти послѣдовательность точекъ, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ.

даннаго куба и удвоенною стороною его; по всей вѣроятности, это и было поводомъ къ общей задачѣ о двухъ среднихъ пропорціональныхъ. Эта послѣдняя задача была рѣшена весьма различными способами, которые всѣ дѣлаютъ честь геометрамъ древняго міра. Первое рѣшеніе принадлежитъ Платону, который для этого изобрѣлъ особый снарядъ, состоявшій изъ прямого угла, на одной сторонѣ котораго двигалась прямая, оставаясь параллельною другой сторонѣ: безспорно это былъ первый примѣръ механическаго рѣшенія геометрической задачи.

Менехмъ, ученикъ Платона, пользовался для той же цѣли *геометрическими мѣстами*: двумя параболами, оси которыхъ взаимно перпендикулярны, а также параболою и гиперболой между асимптотами.

Евдоксъ, другой ученикъ и другъ Платона, прилагалъ другія кривыя, нарочно для этой цѣли изобрѣтенныя имъ; къ сожалѣнію, его рѣшеніе не дошло до насъ и мы даже не знаемъ, какія это были кривыя.

Рѣшеніе знаменитаго пиѳагорейца **Архитаса,** чтенія котораго слушалъ Платонъ въ Италіи, было чисто умозрительное. Оно замѣчательно тѣмъ, что основывалось на употребленіи *кривой двоякой кривизны*; это была первая кривая такого рода, разсмотрѣнная геометрами; по крайней мѣрѣ она самая древняя изъ извѣстныхъ намъ [3]).

---

[3]) Образованіе этой кривой слѣдующее: «На діаметрѣ основанія прямаго круглаго цилиндра вообразимъ себѣ описанный полукругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ плоскости основанія цилиндра; будемъ вращать діаметръ вмѣстѣ съ описаннымъ на немъ полукругомъ около одного изъ концовъ, оставляя плоскость полукруга по прежнему перпендикулярной къ основанію; этотъ полукругъ во всякомъ положеніи будетъ пересѣкать поверхность цилиндра въ одной точкѣ; послѣдовательность такихъ точекъ и образуетъ кривую двоякой кривизны, о которой идетъ рѣчь».

Чтобы рѣшить задачу о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, Архитасъ пересѣкаетъ эту кривую круглымъ конусомъ, ось вращенія котораго есть образующая цилиндра, проходящая черезъ неподвижный конецъ вращающагося діаметра: точка пересѣченія доставляетъ искомое рѣшеніе.

Четыре приведенныя здѣсь рѣшенія задачи о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, какъ мы видимъ, существенно различны между собою. Та же задача и послѣ того въ теченіе многихъ вѣковъ занимала геометровъ и потому число рѣшеній ея значительно увеличилось. Евтоцій, математикъ шестаго столѣтія по Р. Х., къ своемъ комментаріи ко второй книгѣ *о шарѣ и цилиндрѣ* Архимеда, приводитъ рѣшенія Эратосѳена, Аполлонія, Никомеда, Герона, Филона, Паппа, Діоклеса и Спора. О всѣхъ этихъ математикахъ мы упомянемъ далѣе въ хронологическомъ порядкѣ.

3. Превосходные методы, указанные Платономъ и учениками его, ревностно разработывались ихъ послѣдователями и были предметомъ многихъ замѣчательныхъ сочиненій, въ которыхъ развиты были главнѣйшія свойства коническихъ сѣченій, этихъ знаменитыхъ кривыхъ линій, которымъ 2000 лѣтъ спустя пришлось играть такую важную роль въ небесной механикѣ, когда Кеплеръ узналъ въ нихъ истинные пути, описываемые планетами и спутниками, и Ньютонъ въ ихъ фокусахъ открылъ средоточіе силы, приводящей въ движеніе всѣ тѣла вселенной.

Важнѣйшимъ изъ такихъ сочиненій было сочиненіе **Аристея** (около 450 до Р. Х.), которое состояло изъ пяти книгъ о коническихъ сѣченіяхъ и о которомъ древніе отзываются съ необыкновенною похвалою. Къ сожалѣнію оно не дошло до насъ, также какъ пять книгъ «*о тѣлесныхъ мѣстахъ*» того же геометра [4]).

4. Къ тому же почти времени относится открытіе *квадратриксы* **Динострата**. Главное свойство этой кривой даетъ способъ дѣ-

---

[4]) Пять книгъ «о тѣлесныхъ мѣстахъ», о которыхъ говоритъ Паппъ въ седьмой книгѣ его «Математическаго Собранія» (Collectiones mathematicae) были по этому указанію возстановлены Вивіани совершенно въ духѣ древней геометріи подъ заглавіемъ: *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae auctore Vincentio Viviani* и т. д. (in folio, Флоренція, 1701 г.) Еще въ 1659 году Вивіани возстановилъ пятую книгу коническихъ сѣченій Аполлонія, которая вмѣстѣ съ 6-ю и 7-ю книгами была найдена Борелли въ то самое время, когда Вивіани оканчивалъ свой трудъ; до этого же времени были извѣстны только четыре первыя книги.

лить уголъ на нѣсколько частей, пропорціональныхъ даннымъ линіямъ, и вѣроятно она была изобрѣтена для рѣшенія возбужденной въ Платоновой школѣ задачи о дѣленіи угла на три равныя части. Еслибы эта кривая могла быть построена геометрически, то ею рѣшалась бы также задача о квадратурѣ круга; вслѣдствіе этого она и получила отъ древнихъ свое названіе— квадратрикса. Паппъ предполагаетъ, что это свойство кривой было открыто Диностратомъ, братомъ Менехма, отчего новые геометры и назвали ее квадратриксою Динострата. Но изъ двухъ мѣстъ Прокла [5]) можно кажется заключить, что кривую эту открылъ и обнаружилъ ея свойства Гиппій, геометръ и философъ, жившій во время Платона [6]).

5. Къ этой же первой эпохѣ развитія геометріи должно отнести **Персея**, который пріобрѣлъ извѣстность открытіемъ *улиткообразныхъ линій* (lignes *spiriques*). Онъ получалъ эти кривыя, пересѣкая различными плоскостями кольцеобразную поверхность (torus), образуемую вращеніемъ круга около неподвижной оси, лежащей въ той же плоскости.

Объ этомъ предметѣ осталось только одно указаніе Прокла въ его комментаріи къ первой книгѣ Евклида [7]), гдѣ онъ ясно описываетъ образованіе этихъ кривыхъ на кольцеобразной поверхности и открытіе ихъ приписываетъ Персею. Спустя нѣсколько строкъ

---

[5]) Смотри 9-ю теорему 3-ей книги и начало 4-й книги комментаріевъ Прокла къ первой книгѣ Евклида.

[6]) Леотодъ, математикъ 17-го столѣтія, хорошо знакомый съ геометріею древнихъ, издалъ особое сочиненіе объ этой кривой, въ которомъ онъ обнаруживаетъ множество любопытныхъ ея свойствъ, оправдывающихъ заглавіе этого сочиненія: *Liber in quo mirabiles quadratricis facultates variae exponuntur*. Авторъ сравниваетъ квадратриксу съ спиралью Архимеда и съ параболой, прилагаетъ ее къ опредѣленію центровъ тяжести, открываетъ ея безконечныя вѣтви и пр. Иванъ Бернулли также открылъ нѣсколько свойствъ этой кривой (См. Томъ I, стр. 447 его сочиненій и Томъ II, стр. 176 и 179 его переписки съ Лейбницемъ).

[7]) Къ четвертому опредѣленію Евклида. Проклъ говоритъ объ улиткообразныхъ линіяхъ еще въ комментаріи къ 7-му опредѣленію и въ началѣ своей 4-й книги, гдѣ онъ опять называетъ эти линіи—улиткообразными Персея.

онъ прибавляетъ, что Геминъ также писалъ объ улиткообразныхъ, и это замѣчаніе очень важно: оно доказываетъ, что Персей жилъ раньше Гемина, о которомъ извѣстно, что онъ существовалъ около времени Гиппарха въ двухъ первыхъ столѣтіяхъ до Р. Х. Очень жаль, что сочиненія Персея и Гемина не дошли до насъ; было бы интересно узнать ихъ геометрическую теорію улиткообразныхъ, потомучто это кривыя четвертаго порядка, изслѣдованіе которыхъ въ настоящее время требуетъ употребленія уравненій поверхностей и довольно трудныхъ вычисленій.

6. **Евклидъ** (285 г. до Р. Х.). Въ лицѣ Евклида, знаменитаго творца элементовъ геометріи, соединяется Платонова школа, въ которой онъ получилъ свое образованіе, съ вновь возникшею Александрійскою школой.

Еще до Евклида многіе греческіе геометры писали объ элементахъ геометріи. Проклъ, который оставилъ намъ имена ихъ, особенно отличаетъ слѣдующихъ: Гиппократа Хіосскаго; Леона, сочиненіе котораго было полнѣе и полезнѣе предыдущаго; Ѳедія Магнезійскаго, замѣчательнаго по тому порядку, въ которомъ онъ расположилъ свое сочиненіе; Гермотима Колофонскаго, который усовершенствовалъ открытія Евдокса и Ѳетеса и присоединилъ къ элементамъ многія собственныя изслѣдованія. Вскорѣ послѣ этого явился Евклидъ, который, по словамъ Прокла, «собралъ элементы, привелъ въ надлежащій порядокъ многое открытое Евдоксомъ, дополнилъ начатое Ѳетесомъ и доказалъ строго все, что до него было доказано еще неудовлетворительно» [8]).

Евклидъ ввелъ въ элементы геометріи методъ, извѣстный подъ названіемъ *reductio ad absurdum* и состоящій въ доказательствѣ, что всякое предположеніе, несогласное съ доказываемой теоремой, ведетъ къ противорѣчію; этотъ методъ особенно полезенъ въ такихъ изысканіяхъ, гдѣ входитъ понятіе о безконечности подъ видомъ несоизмѣримыхъ количествъ. Архимедъ въ большинствѣ своихъ сочиненій употреблялъ этотъ способъ доказательства; Аполлоній пользовался имъ съ успѣхомъ въ 4-й книгѣ о коническихъ сѣченіяхъ; новѣйшіе геометры извлекли изъ него также много поль-

---

[8]) Прокла 2-я книга, 4-я глава, въ комментаріяхъ къ первой книгѣ Евклида.

зы въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ наука не въ состояніи дать прямаго доказательства, которое одно доводитъ истину до совершенной очевидности и вполнѣ удовлетворяетъ требованіямъ нашего ума.

Элементы Евклида состоятъ изъ 13 книгъ, къ которымъ обыкновенно присоединяютъ двѣ книги о пяти правильныхъ тѣлахъ, приписываемыя Гипсиклу Александрійскому, который жилъ 150 лѣтъ позднѣе Евклида.

«Можно получить ясное понятіе о всемъ сочиненіи, представивъ себѣ его составленнымъ изъ четырехъ частей. Первая часть состоитъ изъ 6 первыхъ книгъ; она въ свою очередь подраздѣляется на три отдѣла, именно: прямые выводы свойствъ данныхъ фигуръ, заключающіеся въ книгахъ 1, 2, 3 и 4; далѣе теорія отношеній между величинами вообще въ 5 книгѣ и наконецъ приложенія этой теоріи къ плоскимъ фигурамъ. Вторую часть составляютъ книги 7, 8 и 9, которымъ присвоивается названіе *ариѳметическихъ*, потомучто въ нихъ говорится объ общихъ свойствахъ чиселъ. Третья часть состоитъ изъ одной 10 книги, въ которой авторъ разсматриваетъ въ подробности величины несоизмѣримыя. Наконецъ въ четвертой части, состоящей изъ 5 послѣднихъ книгъ, изучаются поверхности и тѣла. Изъ этого обширнаго учебника въ наше преподаваніе введены только 6 первыхъ, 11-я и 12-я книги» [9]).

7. *Элементы* сдѣлали имя Евклида знаменитымъ, хотя это — не единственный трудъ его, заслуживающій удивленія. Великій геометръ расширилъ предѣлы науки многими другими сочиненіями, которыя доставили бы ему не меньшую славу, еслибы дошли до насъ. Для насъ сохранилось только одно изъ нихъ, и именно наименѣе важное, извѣстное подъ названіемъ δεδόμενα (данныя, data). Это есть продолженіе элементовъ, назначавшееся для того, чтобы облегчить употребленіе и приложеніе ихъ къ рѣшенію всѣхъ вопросовъ, входящихъ въ область геометріи. Евклидъ называетъ здѣсь *даннымъ* все то, что, на основаніи теоремъ, заключащихся въ элементахъ,

---

9) Заимствуемъ этотъ очеркъ элементовъ Евклида изъ превосходной замѣтки Лакруа въ *Biographie universelle*.

непосредственно слѣдуетъ изъ условій задачи. Напримѣръ, «если проводимъ изъ данной точки прямую, касательную къ данному кругу, то эта прямая есть *данная* по величинѣ и положенію» (Теорема 91 въ *Data* Евклида).

Древніе и средневѣковые геометры во всѣхъ геометрическихъ изысканіяхъ ссылались на теоремы «*данныхъ*», также какъ и на теоремы «элементовъ»; самъ Ньютонъ пользовался въ «*Principia*» этою книгою Евклида, также какъ и «коническими сѣченіями» Аполлонія. Но съ того времени подобные слѣды древности исчезли изъ сочиненій геометровъ и теперь книга «*данныя*» знакома развѣ только тѣмъ, кто занимается исторіею науки. [10])

Изъ нѣкоторыхъ теоремъ книги «данныя» легко можно вывесть рѣшеніе уравненій второй степени, которое у древнихъ въ первый разъ встрѣчается только у Діофанта, жившаго 600 лѣтъ позднѣе Евклида. Примѣромъ этому можетъ служитъ слѣдующая теорема: «Если двѣ прямыя, наклоненныя подъ даннымъ угломъ, заключаютъ данную площадь и если дана ихъ сумма, то и каждая изъ нихъ будетъ дана (извѣстна)» [11]).

[10]) Въ книгѣ «данныя» Евклидъ употребляетъ одно выраженіе, которое дѣлаетъ непонятными его умозаключенія, и самый смыслъ котораго трудно уяснить себѣ изъ даннаго имъ опредѣленія. Такъ какъ это выраженіе встрѣчается также у Аполлонія и Паппа и употреблялось даже въ сочиненіяхъ прошлаго столѣтія, то считаемъ здѣсь умѣстнымъ упомянуть о немъ. Евклидъ говоритъ, что одна величина болѣе другой на данную относительно содержанія (по отношенію къ содержанію), когда одна величина безъ данной имѣетъ къ другой величинѣ данное отношеніе (содержаніе). Такъ, если c будетъ данная величина, а μ содержаніе, то величина A будетъ болѣе B на данную c относительно содержанія μ, когда $\frac{A-c}{B}=\mu$.

Евклидъ хотѣлъ, какъ видно, трехчленное уравненіе представить въ видѣ равенства двухъ членовъ.

[11]) Эта теорема содержитъ въ себѣ рѣшеніе двухъ уравненій $xy=a^2$ и $x+y=b$, изъ которыхъ прямо получается уравненіе второй степени $x^2-bx+a^2=0$. Рѣшеніе задачи у Евклида даетъ два корня этого квадратнаго уравненія.

Другая теорема (87-я) рѣшаетъ два уравненія: $xy=a^2$ и $x^2-\mu y^2=b^2$, которыхъ корни получаются изъ уравненія четвертой степени, приводимаго къ квадратному.

Въ 13-й книгѣ элементовъ, имѣющей предметомъ вписываніе правильныхъ многоугольниковъ и многогранниковъ въ кругъ и шаръ, находимъ послѣ 5-й теоремы слѣдующее объясненіе анализа и синтеза.

«Что такое анализъ и что синтезъ?»

«Въ анализѣ принимаемъ требуемое за доказанное и такимъ путемъ достигаемъ до истины, которую желаемъ обнаружить».

«Въ синтезѣ начинаемъ съ того, что уже доказано, и переходимъ къ заключенію, или къ познанію того, что нужно доказать».

Многія слѣдующія за этимъ предложенія изслѣдованы и по аналитическому и по синтетическому методу.

8. Изъ недошедшихъ до насъ трудовъ Евклида должно особенно сожалѣть объ утратѣ: четырехъ книгъ о коническихъ сѣченіяхъ, теорія которыхъ была имъ значительно развита, потомъ четырехъ книгъ о мѣстахъ на поверхности [12]) и наконецъ трехъ книгъ о поризмахъ. Изъ предисловія къ 7-й книгѣ «Математическаго Собранія» Паппа видно, что сочиненіе «поризмы» отличалось глубиною и проницательностію и употреблялось, какъ пособіе, для рѣшенія труднѣйшихъ задачъ. (*Collectio artificiosissima multarum rerum, quae spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum.*) 38 леммъ, предложенныхъ этимъ ученымъ комментаторомъ для поясненія «поризмъ», доказываютъ, что «поризмы» Евклида заключали въ себѣ такія свойства прямой линіи и круга, которыя въ новѣйшей геометріи доставляются теоріею трансверсалей.

Паппъ и Проклъ суть единственные геометры древности, упоминавшіе о поризмахъ; но уже во времена перваго изъ нихъ значеніе слова πορίσμα измѣнилось и объясненія какъ Паппа, такъ и Прокла, объ этомъ предметѣ такъ неясны, что для ученыхъ новаго времени было трудною задачею понять, въ чемъ заключалось различіе, которое древніе установили между теоремою и проблемою съ одной стороны и третьимъ видомъ предложеній, называв-

---

[12]) Въ Примѣчаніи II предлагаемъ нѣсколько соображеній объ этомъ Евклидовомъ сочиненіи, возстановленіе котораго до сихъ поръ никѣмъ не было предпринято.

шихся поризмами, съ другой; и въ особенности трудно было узнать, что такое были именно поризмы Евклида.

Паппъ приводитъ тридцать предложеній, относящихся къ поризмамъ, но они изложены такъ кратко и отъ ветхости рукописи и утраты чертежа сдѣлались настолько неполными, что знаменитый Галлей, который безспорно имѣлъ достаточно опытности въ дѣлѣ древней геометріи, признается [13]), что въ этихъ предложеніяхъ онъ ничего не понимаетъ и что ни одно изъ нихъ не было еще возстановлено до средины послѣдняго столѣтія, хотя лучшіе геометры посвящали свои изслѣдованія этому предмету (см. Прим. III).

Р. Симсону принадлежитъ честь разъясненія какъ многихъ изъ этихъ загадочныхъ теоремъ, такъ и той особой формы, которая была свойственна только этому роду предложеній. Объясненіе поризмъ, предложенное этимъ геометромъ, слѣдующее: «Поризма есть предложеніе, въ которомъ высказывается, что нѣкоторыя геометрическія величины могутъ быть опредѣлены и дѣйствительно опредѣляются, если даны ихъ соотношенія съ величинами постоянными и извѣстными, а также съ такими величинами, которыя могутъ быть измѣняемы до безконечности; эти послѣднія величины связываются сверхъ того однимъ или нѣсколькими условіями, опредѣляющими законъ ихъ измѣняемости». Напримѣръ, если даны двѣ неподвижныя оси, на которыя изъ каждой точки нѣкоторой прямой опускаются перпендикуляры p и q, то всегда можно найти такую величину (длину) a и такое отношеніе α, чтобы между двумя перпендикулярами существовало постоянное соотношеніе $\frac{p-a}{q}=\alpha$. (По способу древнихъ это предложеніе будетъ выражено такъ: первый перпендикуляръ будетъ болѣе втораго на величину данную относительно содержанія).

Здѣсь данныя постоянныя величины—двѣ оси; измѣняемыя величины—перпендикуляры p и q; законъ, которому подчиняются перемѣнныя величины— условіе, что точка, изъ которой опуска-

[13]) Замѣтка Галлея къ тексту Паппа о поризмахъ, повторенная вмѣстѣ съ предисловіемъ къ 7-й книгѣ Математическаго Собранія въ началѣ сочиненія о «de sectione rationis» Аполлонія, in 4-to, 1706.

ются эти перпендикуляры, берется всегда на данной прямой; наконецъ искомыя суть длина a и содержаніе α, помощію которыхъ между постоянными и измѣняющимися величинами устанавливается предписанное соотношеніе.

Изъ этого примѣра видно, въ чемъ заключается сущность поризмъ, какъ понялъ ее Р. Симсомъ, воззрѣніе котораго вообще признается справедливымъ. Впрочемъ слѣдуетъ замѣтить, что не всѣ геометры считаютъ это воззрѣніе Симсона истиннымъ выраженіемъ идеи Евклида. Хотя мы, лично, и раздѣляемъ мнѣніе знаменитаго глазговскаго профессора, однако должны сказать, что въ его сочиненіи мы не нашли полнаго разрѣшенія великой загадки поризмъ. Это задача въ дѣйствительности весьма сложная и для всѣхъ частей ея желательно имѣть рѣшенія, которыхъ мы напрасно искали бы въ трудѣ Симсона. Остается еще разрѣшить слѣдующіе вопросы.

1) Какова была форма выраженія поризмъ?

2) Каковы были предложенія, заключавшіяся вообще въ этомъ сочиненіи Евклида и въ особенности тѣ изъ нихъ, относительно которыхъ Паппъ оставилъ намъ весьма неполныя указанія?

3) Какія намѣренія и философскія соображенія заставили Евклида изложить это сочиненіе въ такой необыкновенной формѣ?

4) Почему это сочиненіе заслуживало того особеннаго предпочтенія, которое даетъ ему Паппъ передъ всѣми другими трудами древнихъ? Въ одномъ только способѣ выраженія теоремы конечно не заключается еще ни заслуги, ни пользы.

5) Какіе въ наше время методы и операціи, хотя и въ иной формѣ, ближе всего подходятъ къ поризмамъ Евклида и что замѣнило ихъ въ рѣшеніи задачъ? Нельзя же предположить, чтобы такое прекрасное и плодотворное ученіе могло безъ слѣда исчезнуть въ наукѣ.

6) Наконецъ было бы необходимо дать удовлетворительное разъясненіе отдѣльныхъ мѣстъ у Паппа объ этихъ поризмахъ,—напримѣръ того мѣста, гдѣ онъ говоритъ, что новые геометры измѣнили значеніе слова поризма, потомучто сами собою не могли всего найти, или, такъ сказать, поризмировать. Еслибы поризмы от-

личались только способомъ выраженія, какъ это, кажется, должно заключить изъ воззрѣнія Р. Симсона, то во всякое время было бы легко поризмировать всѣ предложенія, способныя къ этому; и мы не видимъ, въ чемъ могли заключаться трудности, принудившія новыхъ геометровъ измѣнить значеніе слова.

Пока мы ограничимся сказаннымъ здѣсь о поризмахъ; но такъ какъ этотъ предметъ имѣетъ, кажется, особенное значеніе по отношенію ко важнѣйшимъ теоріямъ современной геометріи, то мы помѣщаемъ въ Примѣчаніи III продолженіе этого параграфа и предлагаемъ тамъ нѣсколько новымъ соображеній объ этомъ важномъ вопросѣ.

9. Вскорѣ послѣ Евклида являются два человѣка, одаренные необыкновенною умственною силою,—Архимедъ и Аполлоній; ими обозначается самая блистательная эпоха древней геометріи. Многочисленныя открытія ихъ во всѣхъ отдѣлахъ математическаго знанія положили основаніе многимъ изъ самыхъ важныхъ современныхъ теорій.

Архимедъ (287-212 до Р. Х.). Квадратура параболы, выведенная Архимедомъ двумя различными способами, была первымъ примѣромъ точнаго опредѣленія площади, заключающейся между прямою и кривою линіей.

Всѣмъ хорошо извѣстно, что Архимеду принадлежатъ слѣдующія открытія: изслѣдованіе спиралей, отношенія ихъ площади къ площади круга, способъ проводить къ нимъ касательныя; опредѣленіе центра тяжести параболическаго сектора; выраженіе объема отрѣзковъ сфероида, параболическаго и гиперболическаго коноидовъ [14]); соотношеніе между шаромъ и описаннымъ цилиндромъ; отношеніе окружности къ діаметру и многія другія. Эти открытія навсегда останутся удивительными по новизнѣ и трудности, которыя они представляли въ свое время, и потому, что въ нихъ лежатъ зачатки большей части дальнѣйшихъ открытій, преимущественно въ тѣхъ отдѣлахъ геометріи, которые касаются измѣре-

[14]) Архимедъ называетъ *сфероидами* тѣла, происходящія отъ обращенія эллипса около большой или малой оси; а *коноидами*—тѣла, образуемыя вращеніемъ около оси параболы и гиперболы.

нія кривыхъ линій и поверхностей и требуютъ разсмотрѣнія безконечныхъ величинъ.

Изысканіе отношенія окружности къ діаметру было первымъ примѣромъ рѣшенія задачи по *приближенію*; этотъ способъ рѣшенія съ успѣхомъ и пользою прилагается весьма часто какъ въ алгебраическихъ вычисленіяхъ, такъ и въ геометрическихъ построеніяхъ.

10. Способъ, который Архимедъ употреблялъ для доказательства всѣхъ этихъ новыхъ и трудныхъ истинъ, по сущности своей былъ *способъ истощенія* (*méthode d'exhaustion*). Онъ состоялъ въ томъ, что искомая величина, напр. кривая линія, разсматривалась какъ предѣлъ, къ которому приближаются вписанные и описанные многоугольники по мѣрѣ постепеннаго удвоенія сторонъ, такъ что разность становится менѣе всякой данной величины. При этомъ мы какъ бы *истощаемъ* разность, откуда взято и названіе способа истощенія. Такое постепенное приближеніе многоугольника къ кривой доставляетъ намъ о ней все болѣе и болѣе ясное представленіе и, при помощи закона непрерывности, мы открываемъ ея искомое свойство. Въ заключеніе, прилагая методъ *reductio ad absurdum*, мы доказываемъ строго справедливость найденнаго результата.

Часто говорятъ, что древніе разсматривали кривыя линіи, какъ многоугольники съ безконечно большимъ числомъ сторонъ. Но такого положенія мы нигдѣ не встрѣчаемъ въ ихъ сочиненіяхъ и оно было бы въ совершенномъ противорѣчіи съ строгостію ихъ доказательствъ: оно введено новѣйшими математиками и, благодаря ему, значительно упростились доказательства древнихъ. Эта счастливая мысль составляетъ уже переходъ отъ метода истощенія къ исчисленію безконечныхъ.

Утверждаютъ также, что методы Архимеда запутаны и мало понятны, основываясь въ этомъ случаѣ на показаніи Бульо (Boulliaud) довольно искуснаго геометра XVII столѣтія, который говоритъ, что онъ не могъ хорошенько понять доказательствъ въ книгѣ Архимеда о спираляхъ. Но это мнѣніе противоположно мнѣнію самихъ древнихъ, которые, благодаря удивительному порядку и ясности, введеннымъ Евклидомъ въ геометрію, должны были

быть самыми вѣрными судьями въ этомъ дѣлѣ; подобный приговоръ опровергается также и мнѣніями новыхъ геометровъ: достаточно указать на сужденія Галилея и Маклорена, которые достаточно изучали творенія Архимеда. «Дѣйствительно думаютъ, говоритъ Маклоренъ, что для доказательства главныхъ предложеній нужно бываетъ много приготовительныхъ теоремъ, отчего методъ его (Архимеда) кажется тяжелымъ. Но число переходныхъ предложеній не составляетъ еще важнаго недостатка: лишь бы мы были убѣждены, что эти переходы необходимы для полнаго и связнаго доказательства». (*A treatise of fluxions*. Введеніе.)

Пейраръ (F. Peyrard), который изъ всѣхъ ученыхъ нашего времени изучилъ наиболѣе основательнымъ образомъ и во всѣхъ подробностяхъ творенія четырехъ великихъ геометровъ древности: Евклида, Архимеда, Аполлонія и Паппа, который перевелъ и объяснилъ ихъ, говоритъ прямо: «Архимедъ въ дѣйствительности труденъ только для тѣхъ, кто не освоился съ методами древнихъ; для тѣхъ же, кто изучалъ эти методы, онъ напротивъ ясенъ и легко понимается» [15].

11. **Аполлоній** (около 247 до Р. Х.). Аполлоній написалъ сочиненіе въ 8 книгахъ о коническихъ сѣченіяхъ. Въ первыхъ четырехъ книгахъ содержалось, мѣстами въ болѣе развитой и обобщенной формѣ, все то, что было прежде написано объ этомъ предметѣ и что въ то время называлось *элементами коническихъ сѣченій*; четыре послѣднія книги заключали въ себѣ собственныя открытія этого великаго геометра.

Аполлоній первый разсматривалъ коническія сѣченія на косомъ конусѣ съ круглымъ основаніемъ: до него для этой цѣли употребляли всегда прямой конусъ вращенія и притомъ всегда брали сѣкущую плоскость перпендикулярную къ образующей; вслѣдствіе этого было необходимо для полученія трехъ родовъ коническихъ сѣченій разсматривать три конуса съ различными углами при вершинѣ. Поэтому и самыя кривыя носили названія *сѣченій остроугольнаго, тупоугольнаго и прямоугольнаго конуса*; названія *эллипсъ*,

---

[15]) Предисловіе къ переводу сочиненій Архимеда.

гирпебола и *парабола* даны имъ въ первый разъ въ сочиненіи Аполлонія [16]).

Почти весь этотъ ученый трудъ основывается на одномъ свойствѣ коническихъ сѣченій, вытекающемъ непосредственно изъ свойствъ того конуса, на которомъ образуются эти кривыя. Въ новѣйшихъ сочиненіяхъ это свойство большею частію вовсе не указывается, но оно заслуживаетъ большаго вниманія, и мы здѣсь упомянемъ о немъ, такъ какъ оно есть ключъ ко всему ученію древнихъ и совершенно необходимо для пониманія ихъ сочиненій.

Вообразимъ себѣ косой конусъ съ круглымъ основаніемъ; проведемъ прямую линію отъ вершины въ центръ основанія; эта прямая называется *осью* конуса. Плоскость, проведенная черезъ ось перпендикулярно къ основанію, пересѣкаетъ конусъ по двумъ образующимъ, а кругъ основанія по діаметру; треугольникъ, имѣющій сторонами діаметръ основанія и двѣ вышесказанныя образующія, называется *осевымъ треугольникомъ*. Для образованія коническихъ сѣченій Аполлоній беретъ плоскости, перпендикулярныя къ плоскости осеваго треугольника. Точки, въ которыхъ сѣкущая плоскость встрѣчаетъ боковыя стороны треугольника, суть *вершины* кривой, а прямая, соединяющая эти точки,—*діаметръ*. Аполлоній называетъ этотъ діаметръ *latus transversum*. Возставимъ въ одной изъ вершинъ кривой перпендикуляръ къ плоскости осеваго треугольника; на этомъ перпендикулярѣ можно опредѣлить такую точку (найти такую длину перпендикуляра), что если соединимъ ее съ другою вершиною и возставимъ изъ какой-нибудь точки діаметра кривой перпендикулярную ординату, то квадратъ этой ординаты, считаемой отъ діаметра до кривой, будетъ равенъ прямоугольнику, составленному изъ отрѣзка ординаты между діаметромъ и упомянутой прямой и изъ той части діаметра, которая заключается между первою вершиною и основаніемъ ординаты.

---

[16]) Впрочемъ два слова, парабола и эллипсъ, извѣстны уже были Архимеду. Первое встрѣчается въ заглавіи одного изъ его сочиненій (о квадратурѣ параболы), но ни разу не употребляется въ самомъ текстѣ; второе употреблено въ первый разъ въ 9 предложеніи книги о коноидахъ и сфероидахъ.

Въ этомъ и состоитъ первоначальное и характеристическое свойство коническихъ сѣченій, открытое Аполлоніемъ, изъ котораго онъ чрезвычайно искусными путями и преобразованіями вывелъ почти всѣ другія свойства. Оно имѣло, какъ мы видимъ, въ его рукахъ почти то же значеніе, какъ уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными въ системѣ аналитической геометріи Декарта.

Изъ сказаннаго видно, что діаметръ и перпендикуляръ данной длины, возстановленный въ концѣ его, достаточны для построенія кривой. На этихъ двухъ элементахъ древніе и основывали свою теорію коническихъ сѣченій. Перпендикуляръ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, назывался *latus erectum*; ученые новаго времени долгое время употребляли измѣненное названіе *latus rectum*, пока наконецъ оно не замѣнилось словомъ *параметръ*, которое удержалось до сихъ поръ. Для опредѣленія длины *latus rectum* Аполлоній и послѣдующіе за нимъ геометры предлагали различныя построенія на самомъ конусѣ, но, кажется, ни одно изъ нихъ не можетъ сравниться съ простымъ и красивымъ построеніемъ Якова Бернулли. Онъ говоритъ: «Проведемъ плоскость параллельную основанію конуса на такомъ же разстояніи отъ вершины, на какомъ находится отъ нея плоскость разсматриваемаго коническаго сѣченія; эта плоскость пересѣчетъ конусъ по кругу, діаметръ котораго и будетъ *latus rectum* коническаго сѣченія» [17].

Отсюда выводится безъ труда способъ помѣщать данное коническое сѣченіе на данномъ конусѣ.

12. Въ сочиненіи Аполлонія изслѣдованы самыя замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій. Укажемъ здѣсь на слѣдующія: свойства асимптотъ, занимающія большую часть второй книги; постоянное отношеніе произведеній отрѣзковъ, получаемыхъ отъ пересѣченія коническаго сѣченія двумя прямыми параллельными двумъ главнымъ осямъ и проходящими чрезъ одну и ту же точку (теоремы 16—23 въ 3-й книгѣ); главныя свойства фокусовъ эллипса и гиперболы, которые называются у Аполлонія *точками прило-*

---

[17]) *Novum theorema pro doctrina sectionum conicarum* (*Acta Erud.* ann. 1689, стр. 586).

женія (въ той же книгѣ теоремы 45—52) [18]; двѣ прекрасныя теоремы о сопряженныхъ діаметрахъ (7-я книга, теоремы 12 и 22, 30 и 31).

Мы должны еще указать на слѣдующую теорему, которая получила особенную важность въ новой геометріи, потомучто она послужила основнымъ положеніемъ теоріи взаимныхъ поляръ и изъ нея же Де-Лагиръ извлекъ основаніе для своей теоріи коническихъ сѣченій «Если черезъ точку пересѣченія двухъ касательныхъ коническаго сѣченія проведемъ сѣкущую, встрѣчающуюся съ кривою въ двухъ точкахъ, и съ линіею, соединяющею точки прикосновенія, въ третьей точкѣ, то эта третья точка съ точкой пересѣченія касательныхъ будутъ соотвѣтственныя гармоническія относительно первыхъ двухъ точекъ» (кн. 3, теор. 37).

Первыя 23 предложенія 4-й книги относятся къ гармоническому дѣленію прямой, проведенной въ плоскости коническаго сѣченія, и по большей части суть частные случаи вышеприведенной теоремы. Въ слѣдующихъ за тѣмъ предложеніяхъ Аполлоній разсматриваетъ систему двухъ коническихъ сѣченій и доказываетъ, что они могутъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ 4 точкахъ. Онъ изслѣдуетъ, что должно происходить, когда коническія сѣченія касаются другъ друга въ одной или двухъ точкахъ, и разсматриваетъ различныя другія относительныя положенія ихъ между собою.

Пятая книга есть самый драгоцѣнный памятникъ Аполлоніева генія. Здѣсь въ первый разъ встрѣчаемъ мы изслѣдованія о *наибольшихъ* и *наименьшихъ*. Здѣсь опять находимъ мы все, чему научаютъ насъ объ этомъ предметѣ современные аналитическіе способы, и вмѣстѣ съ тѣмъ усматриваемъ первые слѣды прекрасной теоріи *развертокъ*. Аполлоній доказываетъ именно, что по каждую сторону оси коническаго сѣченія находится послѣдовательность точекъ, изъ которыхъ можно къ противолежащей части кривой провести только *одну* нормаль; онъ даетъ построеніе этихъ точекъ и замѣчаетъ, что непрерывнымъ рядомъ ихъ отдѣляются другъ отъ друга два пространства, имѣющія то замѣчательное различіе, что

---

[18]) См. Примѣч. IV.

изъ точекъ одного можно провести къ противолежащей дугѣ кривой двѣ нормали, а изъ точекъ другаго—ни одной. Въ этомъ мы узнаемъ полное опредѣленіе *центровъ кривизны* и *развертки* коническаго сѣченія. Точки коническаго сѣченія, чрезъ которыя проходятъ нормали, проводимыя изъ данной точки, Аполлоній строитъ при помощи гиперболы, опредѣляя при этомъ ея элементы. Всѣ эти изысканія отличаются удивительною проницательностію Великій трудъ Аполлонія пріобрѣлъ ему, по свидѣтельству Гемина, прозваніе геометра *по преимуществу* (κατ' ἐξοχήν).

До насъ дошли только семь первыхъ книгъ этого сочиненія: первыя четыре на языкѣ подлинника, а остальныя три въ арабскомъ переводѣ. Галлей сдѣлалъ опытъ возстановленія восьмой книги въ превосходномъ и единственномъ полномъ изданіи *коническихъ сѣченій Аполлонія* [19]).

13. Аполлоній оставилъ послѣ себя еще многія другія сочиненія, относящіяся по большей части къ геометрическому анализу; изъ нихъ мы имѣемъ только одно *de sectione rationis*; остальныя же подъ заглавіями *de sectione spatii*, *de sectione determinata*, *de tactionibus*, *de inclinationibus*, и *de locis planis* возстановлены по указаніямъ Паппа различными геометрами двухъ послѣднихъ столѣтій.

Аполлонію принадлежитъ наконецъ честь примѣненія геометріи къ астрономіи; ему приписываютъ теорію эпицикловъ, помощію которыхъ объясняются явленія стоянія и возвратнаго движенія планетъ. Птоломей приводитъ имя Аполлонія по поводу этого предмета въ своемъ Альмагестѣ.

14. Между современниками Архимеда и Аполлонія слѣдуетъ отличить **Эратосѳена**, родившагося въ 276 году до Р. Х. (11 лѣтъ по-

---

[19]) *Apollonii Pergaei conicorum libri octo*; in folio, Oxoniae, 1710. Пейраръ, въ предисловіяхъ къ переводу Архимеда и къ переводу Евклида на три языка, обѣщалъ французскій переводъ коническихъ сѣченій Аполлонія. Но смерть застигла этого трудолюбиваго дѣятеля науки, когда первые листы уже были отпечатаны. Было бы очень жаль, еслибы плоды его труда были потеряны для Франціи. Средства, назначаемыя для поощренія наукъ, не могли бы найти лучшаго употребленія, какъ изданіе этого сочиненія.

слѣ Архимеда и 31 годъ прежде Аполлонія). Этотъ философъ, глубоко свѣдущій во всѣхъ отросляхъ знанія, былъ директоромъ александрійской библіотеки при третьемъ Птоломеѣ и долженъ быть поставленъ на ряду съ тремя знаменитыми геометрами древности—Аристеемъ, Евклидомъ и Аполлоніемъ. Паппъ упоминаетъ объ его сочиненіи въ двухъ книгахъ, которое относилось къ геометрическому анализу, но которое для насъ утрачено. Оно носило названіе *de locis ad medietates;* какія это были геометрическія мѣста—неизвѣстно. Эратосѳенъ изобрѣлъ снарядъ для построенія двухъ среднихъ пропорціональныхъ, который назывался *Mesolabium* и который онъ самъ описываетъ въ письмѣ къ царю Птоломею, причемъ онъ разсказываетъ также исторію задачи объ удвоеніи куба. Это письмо передано намъ Евтоціемъ въ его комментаріи на книгу Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ. Паппъ въ «Математическомъ Собраніи» даетъ также построеніе Эратосѳенова мезолябія.

15. Труды Архимеда и Аполлонія обозначаютъ собою самую блистательную эпоху древней науки. Впослѣдствіи труды эти послужили началомъ и основаніемъ для двухъ общихъ вопросовъ, занимавшихъ собою геометровъ всѣхъ эпохъ,—вопросовъ, къ которымъ примыкаютъ почти всѣ ихъ сочиненія, распадающіяся такимъ образомъ на два класса и какъ бы раздѣляющія между собою всю область геометріи.

Первый изъ этихъ важныхъ вопросовъ есть квадратура криволинейныхъ фигуръ; онъ былъ поводомъ къ изобрѣтенію исчисленія безконечныхъ, открытаго и мало по малу разработаннаго Кеплеромъ, Кавальери, Ферматомъ, Лейбницемъ и Ньютономъ.

Второй вопросъ есть теорія коническихъ сѣченій, вызвавшая прежде всего геометрическій анализъ древнихъ, а затѣмъ способы перспективы и трансверсалей. Этотъ второй вопросъ самъ былъ предшественникомъ общей теоріи кривыхъ линій всѣхъ порядковъ и той обширной части геометріи, въ которой при изысканіи свойствъ протяженія принимается въ соображеніе только видъ и положеніе фигуръ и въ которой мы пользуемся только пересѣченіемъ линій и поверхностей и отношеніями между прямолинейными разстояніями (координатами).

Эти два обширные отдѣла геометріи, изъ которыхъ каждый имѣетъ свой особый характеръ, можно обозначить названіями: *г ометрія мѣры* и *геометрія вида и положенія*, или названіями геометріи Архимеда и геометріи Аполлонія.

Впрочемъ на такіе же два отдѣла распадаются и всѣ математическія науки, имѣющія, по выраженію Декарта, предметомъ изысканія о *порядкѣ* (расположеніи) и о *мѣрѣ* [20]). Еще Аристотель (383—322 до Р. Х.) высказалъ ту же мысль въ слѣдующихъ словахъ: «чѣмъ же другимъ занимаются математики, если не порядкомъ и отношеніемъ?» [21]).

Такое опредѣленіе математическихъ наукъ и выраженное въ немъ раздѣленіе ихъ на два обширные отдѣла примѣнимо въ особенности къ геометріи. Удивительно, что даже въ лучшихъ сочиненіяхъ по геометріи эта наука опредѣляется какъ имѣющая предметомъ *измѣреніе* пространства. Подобное опредѣленіе очевидно неполно и даетъ ложное понятіе о цѣли и предметѣ геометріи. Это замѣчаніе заслуживаетъ вниманія и мы возвратимся къ нему въ Примѣчаніи V.

16. Въ продолженіе трехъ или четырехъ вѣковъ послѣ Архимеда и Аполлонія многіе геометры, хотя и не могли сравняться съ этими великими людьми, однако заслужили себѣ почетное имя въ исторіи науки и продолжали обогащать геометрію полезными открытіями и теоріями. Въ слѣдующихъ затѣмъ двухъ или трехъ столѣтіяхъ жили комментаторы, передавшіе намъ творенія и имена геометровъ древняго міра; затѣмъ, наконецъ, до самаго возрожденія наукъ въ Европѣ, наступаетъ время невѣдѣнія, въ теченіе котораго геометрія въ дремлющемъ состояніи хранилась у Арабовъ и Персовъ.

Мы упомянемъ вкратцѣ только о важнѣйшихъ сочиненіяхъ знаменитѣйшихъ писателей этого періода, обнимающаго около 1700 лѣтъ.

---

20) «Всѣ соотношенія, которыя могутъ существовать между однородными предметами, приводятся къ двумъ: порядку и мѣрѣ.» (*Règles pour la direction de l'esprit*; *ouvrage posthume de Descartes*, 14-е правило). Еще прежде этого Декартъ сказалъ: «Всѣ науки, имѣющія предметомъ изслѣдованія порядка и мѣры, относятся къ математикѣ» (ibid. 4 е правило).

21) Третья лава 11-й книги Метафизики Аристотеля

При этомъ должно замѣтить, что время, въ которому мы теперь переходимъ, есть время самыхъ значительныхъ успѣховъ астрономіи. Труды всѣхъ геометровъ, о которыхъ мы будемъ говорить, за исключеніемъ Никомеда, относились главнымъ образомъ къ этой наукѣ и ей преимущественно обязаны своею извѣстностью.

Такое измѣненіе въ направленіи науки было необходимымъ слѣдствіемъ великихъ открытій Архимеда и Аполлонія, которыя требовали нѣсколькихъ столѣтій изученія и размышленія, прежде нежели можно было идти далѣе въ изученіи предметовъ, изслѣдованныхъ этими геніальными людьми.

Прибавленіе. **Геронъ** *Александрійскій,* ученикъ знаменитаго механика Ктезибія, прославившійся своимъ сочиненіемъ *о пневматикѣ* и различными изобрѣтеніями по механикѣ, о которыхъ говорится въ восьмой книгѣ «Математическаго Собранія» Паппа, отличался также въ геометріи. Евтоцій сохранилъ для насъ его рѣшеніе задачи о двухъ среднихъ пропорціональныхъ и заимствовалъ изъ его сочиненія περὶ μετριχῶν ариѳметическое правило для извлеченія корней квадратныхъ изъ чиселъ.

Проклъ упоминаетъ объ немъ какъ объ авторѣ новыхъ доказательствъ для различныхъ элементарныхъ теоремъ, при чемъ онъ допускалъ только три аксіомы Евклида *). Григорій Назіанзинъ (328—389 г.) ставитъ его въ число великихъ геометровъ древности. (*Oratio* 10).

Сочиненія Герона были многочисленны, но большая часть изъ нихъ или не дошла до насъ, или оставалась неиздана. Изъ сочиненій, относящихся собственно къ геометріи, издано и переведено только два. Однимъ изъ нихъ, о которомъ историки математическихъ наукъ, не знаю почему, ничего не говорятъ, мы обязаны Дасиподію. Заглавіе его было: *Nomenclatura vocabulorum geometricorum.* **) Это

*) *Commentarius in Euclidem,* liber tertius.

**) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Geronis Alecandrini vocabula quaedam Geometriae antea nunquam edita, graece et latine, per Conradum Dasypodium.* Argentinae, 1571, in—8.—*Oratio C. Dasypodii de Discilpinis mathematicis.* Ejusdem *Heronis Alexandrini Nomenclaturae vocabulorum geometricorum translatio* Ejusdem *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis.* Argent., 1579, in—8.

рядъ опредѣленій различныхъ предметовъ, относящихся къ геометріи. Опредѣленія эти сопровождаются комментаріями и весьма ясными дополненіями. *)

Въ предисловіи Дасиподій говоритъ, что у него есть много другихъ сочиненій Герона, которыя онъ предполагаетъ издать. Одно изъ нихъ, называющееся Διοπτρικά, есть другое сочиненіе Герона по геометріи, дошедшее до насъ, благодаря ученому Болонскому профессору Вентури, который перевелъ его по итальянски подъ заглавіемъ *Il Traguardo* (уровень), соотвѣтствующимъ заглавію греческаго текста: περὶ διόπτρας и помѣстилъ въ примѣчаніяхъ къ исторіи и теоріи оптики **). Сочиненіе это есть трактатъ о геодезіи, въ которомъ графически на поверхности земли рѣшается множество вопросовъ практической геометріи при помощи инструмента, называвшагося у древнихъ *діоптромъ*.

Сочиненіе это достойно имени Герона; это—драгоцѣнный памятникъ греческой геометріи и долженъ занимать мѣсто на ряду съ сочиненіями Евклида, Архимеда и Аполлонія. Это сочиненіе пополняетъ пробѣлъ между другими, дошедшими до насъ, твореніями древности. Древніе всегда отличали практическую геометрію, подъ названіемъ *геодезіи*, отъ геометріи въ собственномъ смыслѣ и писали объ этой геодезіи особо***); по этой отрасли геометріи мы не имѣемъ никакихъ сочиненій А ександрійской школы.

---

*) Фабрицій (*Bibl. graeca*, lib. 3, cap. 24) и Геильброннеръ (*Hist. Matheseos*, p. 398) приписываютъ это сочиненіе Герону младшему, жившему въ Константинополѣ въ VII вѣкѣ нашего лѣтосчисленія. Но Бернардинъ Бальди, также какъ Дасиподій, помѣстилъ его въ число сочиненій Герона старшаго. (См. *Cronica de' matematici*, p. 35).

**) *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*. Bologna, 1814, in-4⁰. Это сочиненіе состоитъ изъ слѣдующихъ четырехъ частей: 1. *Considerazioni sopra varie parti dell' ottica presso di antichi*. 2. *Erone il meccanico del* traguardo *tradotto dal greco ed illustrato con note*; 3. *Dell' iride degli aloni ed de' paregli*; *Appendice intorno all'ottica di Tolommeo*.

***) *Si enim in hoc differet solum Geometria a Geodaesia, quod haec quidem eorum est quae sentimus, illa vero non sensibilium est* (Аристотель, 2-я кн. Метафизики, гл. 11-я).

Извѣстно впрочемъ сочиненіе по геодезіи Герона младшаго, жившаго черезъ восемьсотъ лѣтъ послѣ Герона старшаго. Но это сочиненіе, заключающее въ себѣ только самыя простыя дѣйствія, и безъ доказательствъ, недостойно стоять на ряду съ геометрическими твореніями Грековъ. Самое важное предложеніе, встрѣчающееся въ немъ, есть выраженіеплощади треугольника посредствомъ трехъ сторонъ его. Но оно находится также въ сочиненіи Герона старшаго и доказано тамъ весьма изящнымъ геометрическимъ построеніемъ. Отсюда, вѣроятно, заимствовалъ его и Геронъ младшій, который часто ссылается на сочиненія своего однофамильца и на сочиненія Архимеда; притомъ въ числовомъ приложеніи формулы онъ беретъ для сторонъ треугольника тѣже числа 13, 14 и 15, которыя находятся у Герона старшаго.

Эти же три числа и формула встрѣчаются также въ геометріи Индѣйцевъ и Арабовъ и даже у Римлянъ, какъ мы увидимъ это, когда будемъ говорить о сочиненіяхъ Брамегупты. (Прим. XII).

Такъ какъ сочиненіе о геодезіи Герона старшаго еще очень мало извѣстно, то мы предлагаемъ здѣсь большую часть задачъ, которыя разрѣшены тамъ помощію инструмента, называемаго *діоптромъ*. Примѣры эти показываютъ, что называлось у Грековъ геодезіею, или практическою геометріей; они заставляютъ сожалѣть, что до сихъ поръ еще не изданъ оригинальный текстъ сочиненія Герона и другіе переводы, подобные переводу Вентури *).

---

*) Вентури указываетъ три библіотеки, обладающія сочиненіемъ Герона: въ Парижѣ, Страсбургѣ и Вѣнѣ; въ послѣдней экземпляръ не полонъ; онъ только одинъ упоминается библіографами и считается, по мнѣнію Ламбеція, за трактатъ о Діоптрикѣ (См. Фабриціуса *Bibl. graeca*, lib. 3, cap. 24; Геильброннера *Hist. Math.* p. 282).

Вентури переводилъ съ копіи экземпляра парижской библіотеки, которая была сравнена съ Страсбургскимъ экземпляромъ. Этотъ послѣдній экземпляръ принадлежалъ по всей вѣроятности Дасиподію. Куда дѣвались другія, принадлежавшія этому геометру, сочиненія Герона?

Конрадъ Геснеръ говоритъ въ *Bibliotheca unisersalis* (*sive catalogus omnium scriptorum locùpletissimus in tribus linguis latina graeca et hebraica*), Tiguri 1545, fol, что извѣстный Diego Hurtardo de Mendoza, которому Европа обязана

1. Измѣрить разность высотъ двухъ точекъ, невидимыхъ одна изъ другой. 2. Провести прямую между двумя точками, невидными одна изъ другой. 3. Найти разстояніе мѣста, гдѣ находишься, отъ другой недоступной точки. 4. Измѣрить ширину рѣки, которой нельзя переплыть 5. Измѣрить разстояніе между двумя отдаленными точками. 6. Провести изъ данной точки перпендикуляръ на прямую, къ которой нельзя приблизиться. 7. Измѣрить высоту недоступной точки. 8. Измѣрить разность высотъ двухъ недоступныхъ точекъ. 9. Измѣрить глубину ямы. 10. Сквозь гору провести прямую, соединяющую двѣ точки, данныя съ различныхъ сторонъ горы 11. Выкопать въ горѣ колодезь, чтобы онъ оканчивался въ данномъ подземномъ углубленіи. 12. Начертить контуръ рѣки. 13. Придать насыпи форму даннаго сферическаго сегмента. 14. Сообщить насыпи опредѣленный наклонъ. 15 Измѣрить поле, не входя въ него. 16. Раздѣлить его на данное число частей посредствомъ прямыхъ выходящихъ изъ одной точки. 17. Раздѣлить треугольникъ и трапецію въ данномъ отношеніи.

17. **Никомедъ** (около 150 г. до Р. Х.). Сочиненія Никомеда до насъ не дошли и мы знаемъ этого геометра только какъ изобрѣтателя конхоиды, которую онъ весьма остроумнымъ образомъ прилагалъ къ рѣшенію задачъ о двухъ среднихъ пропорціональныхъ и о дѣленіи угла на три части.

Конхоида, замѣчательная уже тѣмъ, что съ помощію ея разрѣшались эти двѣ извѣстнѣйшія задачи древности, пріобрѣла новую важность послѣ того, какъ Вьетъ замѣтилъ, что къ этимъ двумъ задачамъ приводится рѣшеніе всякой задачи, зависящей отъ уравненія третьей степени, а Ньютонъ, въ своей *Arithmetica universalis* примѣнилъ эту кривую прямо къ построенію всякаго уравненія третьей степени.

18. **Гиппархъ** (около 150 г. до Р. Х.), величайшій астрономъ древности, истинный основатель математической астрономіи, напи-

---

многими греческими рукописями, имѣлъ нѣсколько рукописей Герона (смотри листъ 319). Онѣ безъ сомнѣнія находятся въ библіотекѣ Эскуріала, куда поступило драгоцѣнное собраніе Мендозы.

салъ сочиненіе въ двѣнадцати книгахъ, въ которомъ находилось построеніе хордъ для дугъ круга [22]).

Астрономическія вычисленія Гиппарха требовали знанія плоской и сферической тригонометріи; начала этихъ наукъ, обязанныхъ, какъ кажется, несомнѣнно ему своимъ происхожденіемъ, [23]) онъ изложилъ въ своемъ сочиненіи *о восхожденіи и захожденіи звѣздъ*. Кажется также, что Гиппарху слѣдуетъ приписать открытіе стереографической проэкціи и двухъ знаменитыхъ теоремъ плоской и сферической тригонометріи, о которыхъ мы упомянемъ, когда будемъ говорить о Менелаѣ и Птоломеѣ.

19. Предполагаютъ, что **Геминъ** (около 100 г. до Р. Х.) жилъ немного времени послѣ Никомеда и Гиппарха Ему приписывается сочиненіе о различныхъ кривыхъ и между прочимъ о винтовой линіи, образуемой на поверхности прямаго круглаго цилиндра. Въ этой кривой онъ обнаружилъ свойство, принадлежащее также прямой линіи и кругу и состоящее въ томъ, что она во всѣхъ своихъ частяхъ подобна самой себѣ [24]). Другое сочиненіе Гемина, подъназаніемъ *Enarrationes geometricae*, часто упоминаемое Прокломъ, было чѣмъ то въ родѣ философскаго разбора отрытій въ геометріи. Оба сочиненія считаются утраченными, но говорятъ, что первое находится въ рукописи въ библіотекѣ Ватикана.

20. Въ сочиненіи *Sphaericorum libri tres* **Өеодосій** (около 100 г. до Р. Х.) собралъ многія свойства большихъ круговъ на сферѣ,

---

[22]) Объ этомъ сочиненіи упоминаетъ Теонъ (Комментарій къ Альмагесту. Кн. I. гл. IX).

[23]) Потомучто съ одной стороны въ комментаріи къ Арату Гиппархъ говоритъ, что имъ найдено рѣшеніе сферическаго треугольника, служащаго для опредѣленія восточной точки эклиптики; съ другой стороны до него мы не находимъ никакого слѣда ни сферической, ни плоской тригонометріи. Деламбръ въ *Histoire de l'astronomie ancienne* (томъ I. стр. 104) замѣчаетъ, что Архимедъ для опредѣленія діаметра солнца накладывалъ уголъ на квадрантъ; отсюда видно, что онъ не имѣлъ способа вычислять уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника по даннымъ основанію и двумъ боковымъ сторонамъ. Тогда не было еще мысли о возможности вычислять хорды для всѣхъ угловъ, т. е. плоская тригонометрія была еще неизвѣстна.

[24]) Прокла комментарій къ первой книгѣ Евклида, 4-е опред. и 5-я теорема

необходимыя въ астрономіи для вычисленія сферическихъ треугольниковъ. Впрочемъ самыхъ вычисленій въ сочиненіи нѣтъ и даже слово треугольникъ нигдѣ не встрѣчается. Но, не смотря на свою элементарность, это сочиненіе цѣнилось весьма высоко, потомучто отличалось основательностію и методическимъ изложеніемъ. По этой причинѣ оно было комментировано Паппомъ и переведено многими изъ лучшихъ геометровъ новаго времени.

Өеодосію принадлежатъ еще два сочиненія: *de habitationibus* и *de diebus et noctibus*, въ которыхъ описываются явленія, какъ они должны представляться обитателямъ земли, смотря по положенію солнца въ эклиптикѣ.

21. Геометръ и астрономъ **Менелай** (около 80 г. по Р. Х.) написалъ также какъ и Өеодосій сочиненіе о геометріи на сферѣ подъ тѣмъ же заглавіемъ *Shaericorum libri tres*; оно извѣстно намъ въ переводахъ на арабскій и еврейскій языки, греческій же текстъ потерянъ. Менелай въ этомъ сочиненіи идетъ далѣе Өеодосія: онъ разсматриваетъ уже свойства сферическихъ треугольниковъ, но не даетъ еще ихъ вычисленія, т. е. сферической тригонометріи, которая, можетъ быть, была предметомъ его другаго сочиненія въ шести книгахъ *о вычисленіи хордъ*, о которомъ упоминаетъ Теонъ, но которое утрачено.

Важнѣйшее предложеніе сферики Менелая есть первая теорема 3-й книги, составляющая основаніе всей сферической тригонометріи Грековъ. Это есть свойство трехъ отрѣзковъ, образуемыхъ какимъ нибудь большимъ кругомъ на трехъ сторонахъ сферическаго триугольника. Теорема эта находилась въ большемъ уваженіи у Арабовъ, которые объясняли ее во многихъ сочиненіяхъ и называли *regula intersectionis*. О подобной же теоремѣ плоскойгеометріи, указанной также Менелаемъ, какъ пособіе для доказательства предыдущей, мы будемъ говорить ниже по поводу Птоломея, такъ какъ она была въ первой разъ найдена въ Альмагестѣ; эта теорема получила особенное значеніе въ новой геометріи, куда ее ввелъ Карно, положившій ее въ основаніе своейтеоріи трансверсалей.

Приведемъ еще двѣ слѣдующія теоремы изъ сферики Менелая, принадлежащія кажется, также этому геометру. 1. Большой кругъ,

дѣлящій уголъ сферическаго треугольниака пополамъ, раздѣляетъ противоположную сторону на двѣ такія части, что хорды ихъ относятся между собою какъ хорды прилежащихъ сторонъ. 2. Три дуги, дѣлящія углы треугольника пополамъ, проходятъ черезъ *одну и туже* точку.

Менелай писалъ также о теоріи кривыхъ линій. Паппъ передаетъ намъ, что одна изъ этихъ кривыхъ была названа Менелаемъ *удивительною*[25]); вѣроятно это была линія двоякой кривизны, потомучто она получалась отъ пересѣченія двухъ кривыхъ поверхностей.

22. **Птоломей** (около 150 г. по Р. Х.) астрономъ и геометръ, обладавшій обширными свѣденіями, оставилъ намъ въ своемъ Альмагестѣ [26]) полное изложеніе плоской и сферической тригонометріи, единственное, доставшееся намъ отъ Грековъ, такъ какъ сочиненія Гиппарха объ этомъ предметѣ утрачены. Здѣсь мы встрѣчаемъ прекрасное свойсво вписаннаго въ кругѣ четыреугольника, состоящее въ томъ, что произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ. Оно дано имъ, какъ вспомогательное средство при построеніи хордъ, соотвѣтствующихъ даннымъ дугамъ круга. [27])

Птоломей за основаніе своей тригонометріи принялъ теорему о шести отрѣзкахъ, данную Менелаемъ, и подобно ему при доказательствѣ этой теоремы пользовался соотвѣтственною теоремою на плоскости. Послѣдняя теорема состоитъ въ слѣдующемъ соотношеніи между отрѣзками, получаемыми на сторонахъ какого-нибудь

---

25) Математическое Собраніе, 4-я книга, послѣ 30-й теоремы.

26) Птоломей далъ своему сочиненію объ астрономіи названіе σύνταξις μαθηματική; издатели перемѣнили это заглавіе въ «великое сочиненіе»; арабскіе переводчики сдѣлали изъ этого: «величайшее» (Almagesti), откуда и произошло употребляемое теперь названіе Альмагестъ.

27) Карно, въ IX главѣ 1-й книги *Géometrie de position*, показалъ, какъ изъ этого предложенія можно вывести всю плоскую тригонометрію; послѣ него Фергола занимался тѣмъ же предметемъ и окончательно разработалъ его въ сочиненіи: *Dal teorema Tolemaico ritragonsi immediatamente i teoremi delle sezioni angolari di Vieta e di Wallis, e le principale verità proposte nella Trigonometria analitica da moderni.* (Первая часть мемуаровъ Неаполитанской Академіи наукъ. 1819).

плоскаго треугольника отъ пересѣченія ихъ прямою, проведенною въ той же плоскости: *произведеніе трехъ изъ этихъ отрѣзковъ, именно тѣхъ, которые не имѣютъ общихъ конечныхъ точекъ, равно произведенію трехъ остальныхъ* [28]). Мы видимъ, что это есть обобщеніе основнаго предложенія теоріи пропорціональныхъ линій, состоящаго въ томъ, что прямая, проведенная параллельно основанію треугольника, дѣлитъ стороны его на пропорціональныя части. Одного этого замѣчанія достаточно, чтобы видѣть, какъ должна быть полезна въ геометріи вышеупомянутая теорема. Главнымъ образомъ она прилагается къ изслѣдованіямъ, въ которыхъ нужно доказать, что три точки лежатъ на одной прямой; для этого строютъ треугольникъ, стороны котораго проходятъ черезъ три разсматриваемыя точки, и потомъ удостовѣряются, существуетъ ли между полученными шестью отрѣзками сказанное соотношеніе.

Въ началѣ нынѣшняго столѣтія эта теорема была, кажется, совсѣмъ неизвѣстна до тѣхъ поръ, пока на нее не было обращено вниманіе въ *Géometrie de position*, и вскорѣ послѣ того въ теоріи трансверсалей, гдѣ она принята за основаніе; а между тѣмъ она еще въ прежнее время принесла много пользы, не говоря уже о значеніи ея у Грековъ, какъ вспомогательной теоремы при доказательствахъ на сферѣ. По важности своей для настоящаго времени она заслуживаетъ, чтобы подробнѣе разсмотрѣть ея исторію,— чему мы и посвящаемъ Примѣчаніе VI.

Кромѣ этого, геометрія обязана Птоломею ученіемъ о *проэкціяхъ*; занимаясь составленіемъ географическихъ картъ и рѣшеніемъ задачъ гномоники, онъ изложилъ начало ученія о проэкціяхъ въ двухъ превосходныхъ сочиненіяхъ *о солнечныхъ часахъ (de l'Analemme)* и *о плоскошаріяхъ* (планисферахъ). Деламбръ думаетъ, что это послѣднее сочиненіе, въ которомъ изучена и приложена стереографическая проэкція, принадлежало Гиппарху, а не Птоломею, какъ предполагали прежде.

Птоломей написалъ также книгу о *трехъ измѣреніяхъ тѣлъ*, гдѣ онъ первый говоритъ о трехъ прямоугольныхъ осяхъ, къ ко-

---

[28]) Книга I, глава XI, съ заглавіемъ: Предварительныя замѣчанія къ доказательствамъ предложеній о сферѣ.

торымъ въ новѣйшей геометріи относятъ положеніе точекъ пространства [29]).

Изъ многихъ другихъ сочиненій Птоломея о различныхъ предметахъ мы упомянемъ еще объ его *Оптикѣ*, въ которой мы встрѣчаемъ чисто геометрическую задачу, занимавшую впослѣдствіи многихъ знаменитѣйшихъ геометровъ, именно задачу объ нахожденіи блестящей точки въ сферическомъ зеркалѣ по даннымъ положеніямъ глаза и свѣтящей точки.

23. Здѣсь оканчивается первый изъ трехъ періодовъ, на которые мы раздѣлили 1700 лѣтъ, отдѣляющихъ Архимеда и Аполлонія отъ времени возрожденія наукъ въ Европѣ.

Великія открытія въ математическихъ наукахъ, доставшіяся на долю древнему міру, закончены. Съ этого времени мы встрѣчаемъ уже не оригинальныхъ писателей, а только извѣстныхъ ученыхъ комментаторовъ, вышедшихъ изъ Александрійской школы. Впрочемъ, **Паппа**, стоящаго во главѣ ихъ, должно отличить отъ всѣхъ другихъ, потомучто въ его сочиненіяхъ видѣнъ еще духъ и производительная сила предшествующихъ столѣтій.

24. Этотъ геометръ около конца четвертаго столѣтія по Р. Х. соединилъ въ своемъ *Математическомъ Собраніи* [30]) разрозненныя открытія знаменитыхъ математиковъ, и чтобы облегчить чтеніе ихъ трудовъ, присоединилъ къ этому множество теоремъ и леммъ. Въ этомъ собраніи, которое есть самый драгоцѣнный памятникъ математики древнихъ, находится много открытій, сдѣланныхъ самимъ Паппомъ, котораго Декартъ считалъ однимъ изъ самыхъ замѣчательныхъ геометровъ древности [31]).

---

[29]) Деламбръ, статья о Птоломеѣ, въ *Biorgaphie universalle.*

[30]) *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico Commandino in latinum conversae, et commentariis illustratae.* Pisanii 1588, fol., и Bononiae 1660, fol.

[31]) «Я убѣжденъ, что первоначальные зародыши истины, которые природа вложила въ разумъ человѣческій и которые мы заглушаемъ въ себѣ обиліемъ и разнообразіемъ читанныхъ и слышанныхъ заблужденій, имѣли такую силу и такое вліяніе въ простодушномъ древнемъ мірѣ, что люди, озаряемые свѣтомъ разума, поставляющаго добродѣтель выше удовольствія и справедливость

Въ этомъ сочиненіи мы находимъ образованіе кривой двоякой кривизны на шарѣ. Паппъ получаетъ именно спираль, подобную Архимедовой, посредствомъ равномѣрнаго движенія точки по большому кругу, который самъ вращается около своего діаметра (кн. 4-я, теор. 30). Паппъ выводитъ выраженіе части сферической поверхности, заключающейся между этою кривою и ея основаніемъ; это—первый примѣръ *квадратуры кривой поверхности.*

Знаменитая теорема Гюльдена, въ которой центръ тяжести служитъ для опредѣленія размѣровъ фигуръ, находится также въ Математическомъ Собраніи и, кажется, была придумана самимъ Паппомъ [32]).

25. Тотчасъ послѣ 30-й теоремы 4-й книги мы находимъ мѣсто, служащее вступленіемъ къ задачѣ о дѣленіи угла на три части, гдѣ сказано, что ученіе о кривыхъ поверхностяхъ и о получаемыхъ на нихъ, посредствомъ составнаго движенія, линіяхъ двоякой кривизны (какъ вышеупомянутая сферическая спираль) было уже разработано древними. Паппъ говоритъ здѣсь о *мѣстахъ на поверхности* и упоминаетъ сочиненія Димитрія Александрійскаго и Филона Тіанскаго объ этомъ предметѣ. Первое изъ нихъ носило заглавіе περὶ γραμμάτων ἐπιστάσεων, но кромѣ этого заглавія намъ болѣе отъ него ничего не осталось; второе имѣло предметомъ изслѣдованіе кривыхъ, происходящихъ отъ пересѣченія двухъ поверхностей; оно называлось περὶ πληκτοειδῶν. Монтукла замѣчаетъ справедливо, что по такимъ ничтожнымъ указаніямъ не легко судить, какія это были поверхности и линіи. Но ученому историку было вѣроятно неизвѣстно одно мѣсто у Паппа (кн. 4, теор. 29), изъ котораго мы узнаемъ, что поверхность винта съ четыреугольною нарѣзкою (la vis à filets carrés) есть плектоида; это ведетъ насъ къ

выше выгодъ, еще не сознавая этого преимущества,—эти люди составили себѣ ясныя понятія о философіи и математикѣ, хотя и не могли довести этихъ наукъ до совершенства. Такія черты, свойственныя истиннымъ математикамъ, мнѣ кажется, встрѣчаются въ Паппѣ и Діофантѣ....» (*Descartes. Règles pour la direction de l'esprit*, 4-е правило)

[32]) См. конецъ предисловія къ 7-ой книгѣ Математич. Собранія.

предположенію, что слово плектоида означало вообще линейчатыя поверхности и вѣроятно выражало собою сплетеніе (l'entrelacement) прямыхъ линій, представляемое этими поверхностями; или, можетъ-быть, оно обозначало поверхности, называемыя теперь конусообразными (коноидами), которыя образуются движеніемъ прямой, опирающейся на неподвижную прямую и кривую линіи, параллельно данной плоскости; наконецъ, можетъ-быть, этимъ словомъ обозначались въ особенности винтообразныя поверхности и даже только поверхность винта съ четыреугольною нарѣзкою.

Неаполитанскій геометръ Флаути въ своемъ сочиненіи соединилъ подъ именемъ плектоидъ всѣ поверхности, образуемыя прямою линіею[33])

Коммандинъ, въ комментаріяхъ къ Паппу, высказываетъ мнѣніе, что слово πληκτοειδής могло произойти отъ ошибки переписчика и должно быть замѣнено словомъ κυλινδρικός. Но такое предположеніе во всякомъ случаѣ невѣрно, потомучто въ томъ мѣстѣ Паппа [34]), которое послужило Коммандину поводомъ къ этому замѣчанію, слово πληκτοειδής безспорно относится не къ цилиндрической, а къ винтовой поверхности съ четыреугольною нарѣзкою.

26. По поводу квадратриксы Динострата Паппъ указываетъ на два свойства винтовыхъ поверхностей, о которыхъ мы здѣсь должны упомянуть, потомучто они доставляютъ два способа построенія квадратриксы и сверхъ того представляютъ собою одно изъ лучшихъ изысканій древнихъ о кривыхъ поверхностяхъ и линіяхъ двоякой кривизны.

Показавъ сперва построеніе квадратриксы посредствомъ пересѣченія вращающагося около центра радіуса круга съ діаметромъ, перемѣщающимся параллельно самому себѣ,—построеніе, которое онъ называетъ механическимъ (кн. 4, теор. 25), Паппъ говоритъ, что та же кривая можетъ быть получена посредствомъ мѣстъ на поверхности и посредствомъ Архимедовой спирали. Оба эти способа построенія суть слѣдующіе:

---

[33]) *Geometria di sito sul piano e nello spazio*; Неаполь 1821.

[34]) Книга 4-я, теорема 29-я, прим. *F*, стр. 92 изданія 1660 г.

Первый способъ, *теорема 28*. «Начертимъ винтовую линію на прямомъ кругломъ цилиндрѣ: перпендикуляры, опущенные изъ точекъ этой кривой на ось цилиндра, образуютъ винтообразную поверхность. Если проведемъ черезъ одинъ изъ такихъ перпендикуляровъ плоскость подъ нѣкоторымъ угломъ къ основанію цилиндра, то она пересѣчетъ винтовую поверхность по кривой, прямоугольное положеніе которой на плоскость основанія цилиндра будетъ *квадратрикса*».

Второй способъ, *теорема 29*. «Примемъ Архимедову спираль за основаніе прямаго цилиндра и представимъ себѣ конусъ вращенія, имѣющій осью ту образующую цилиндра, которая проходитъ черезъ начало спирали; этотъ конусъ пересѣчется съ поверхностію цилиндра по кривой двоякой кривизны.[35]) Перпендикуляры, опущенные изъ точекъ этой кривой на вышесказанную образующую цилиндра, составляютъ винтообразную поверхность (въ этомъ именно мѣстѣ Паппъ называетъ ее плектоидой). Плоскость, проведенная подъ извѣстнымъ наклоненіемъ черезъ одинъ изъ перпендикуляровъ, пересѣкаетъ поверхность по кривой, прямоугольное проложеніе которой на плоскость спирали есть квадратрикса.»

Оба построенія состоятъ въ томъ, что винтовая поверхность пересѣкается плоскостію, проходящею черезъ образующую, и послѣ того сѣченіе пролагается на плоскость перпендикулярную къ оси винта. Въ первомъ построеніи винтовая поверхность получается при помощи винтовой линіи, черезъ которую проводятся образующія этой поверхности; во второмъ—образующія опредѣляются по-

[35]) Это есть коническая винтовая линія, принадлежащая къ числу извѣстныхъ древнимъ линій двоякой кривизны. Проклъ говоритъ объ ней въ комментаріѣ къ 4-му опредѣленію первой книги Евклида. Въ новое время многіе геометры занимались этою кривою, въ особенности Паскаль (*De la dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cone*; *oeuvres de Pascal*, tome V, p. 422.) и Гвидо-Гранди (*Epistola ad Th. Cevani*; *oeuvres posthumes d'Huygens*, tome II.). Варшавскій профессоръ Грабинскій нѣсколько лѣтъ тому назадъ далъ графическое построеніе касательныхъ къ конической спирали (*Annales de mathématiques*, t. XVI, p. 167 et 376).

средствомъ линіи двоякой кривизны, происходящей отъ пересѣченія прямаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ спираль, съ конусомъ вращенія, имѣющимъ осью образующую цилиндра, проходящую черезъ начало спирали.

27. Эти два построенія основываются, какъ мы видимъ, на слѣдующихъ двухъ свойствахъ винтообразныхъ поверхностей,—свойствахъ, хотя прямо и не высказанныхъ Паппомъ, но доказательство которыхъ заключается въ его теоремахъ 28 и 29.

1) Если винтообразная поверхность пересѣчена плоскостію, проходящею черезъ образующую линію, то кривая сѣченія пролагается на плоскость, перпендикулярную къ оси поверхности, въ видѣ квадратиксы Динострата [36]).

2) Конусъ вращенія, имѣющій одну и ту же ось съ винтообразною поверхностію, пересѣкаетъ эту поверхность по кривой двоякой кривизны, проложеніе которой на плоскость перпендикулярную къ оси есть Архимедова спираль.

Обѣ теоремы ведутъ къ построенію спирали помощію мѣстъ на поверхности, подобно указанному Паппомъ построенію квадратриксы.

28. Эти изслѣдованія кривыхъ поверхностей и линій двоякой кривизны въ примѣненіи къ построенію плоскихъ кривыхъ, находящія теперь свое мѣсто въ начертательной геометріи и составляющія отличительный характеръ школы Монжа, заслуживаютъ, какъ мнѣ кажется, чтобы въ сочиненіи Паппа на нихъ было обращено вниманіе. Они могли бы привести этого геометра къ построенію касательныхъ къ спирали и квадратриксѣ; для этого было бы достаточно замѣчанія, что касательныя эти суть проложенія касательныхъ къ кривымъ, проведеннымъ на винтообразной поверхности, и что касательная въ точкѣ пересѣченія двухъ поверхностей есть пересѣченіе касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ въ этой точкѣ. Этимъ путемъ очень легко получаются всѣ извѣ-

[36]) Если сѣкущая плоскость не будетъ проходить чрезъ образующую винообразной поверхности, а будетъ проведена произвольно, то мы нашли, что въ проложеніи получится или удлиненная, или укороченная квадратрикса т. е., говоря другими словами, конхоида.

стныя свойства касательныхъ спирали и квадратриксы [37]. Такія изслѣдованія совершенно въ духѣ современной начертательной геометріи; но едва ли вѣроятно, чтобы познанія древнихъ о кривыхъ поверхностяхъ могли простираться такъ далеко; сомнительно даже, существовало ли во времена Паппа достаточно ясное понятіе о касательной плоскости въ данной точкѣ винтовой поверхности.

29. Вдумываясь въ сущность вышеприведенныхъ построеній, мы замѣтимъ, что на нихъ можно смотрѣть, какъ на простыя приложенія двухъ общихъ способовъ превращать всякія плоскія кривыя въ другія, совершенно съ ними различныя, посредствомъ винтообразной поверхности. Помощію такихъ преобразованій обнаруживаются соотношенія между построеніями и свойствами такихъ кривыхъ, которыя повидимому ничего не имѣютъ общаго, кромѣ одинаковой формы уравненія между совершенно разнородными перемѣнными. Таковы, напримѣръ, разнаго наименованія спирали по отношенію къ тѣмъ кривымъ, которыя носятъ то же наименованіе въ обыкновенной системѣ координатъ. Нѣкоторыя мысли объ этомъ я изложу въ Примѣчаніи VIII.

30. Въ «Математическомъ Собраніи» находится много теоремъ, которыя въ наше время относятся къ теоріи трансверсалей, между прочимъ и та теорема, которая служитъ основаніемъ этой теоріи и которая заставляетъ предполагать, что изящное и полезное ученіе о трансверсаляхъ употреблялось уже древними, преимущественно въ сочиненіяхъ, относившихся къ геометрическому анализу.

Изъ теоремъ, относящихся къ теоріи трансверсалей и изъ которыхъ многія имѣютъ предметомъ *гармоническую* пропорцію, мы приведемъ нѣкоторыя, доказанныя въ 7-й книгѣ и назначенныя служить леммами для пониманія поризмъ Евклида.

Теорема 129-я говоритъ: *если четыре линіи исходятъ изъ одной точки, то онѣ образуютъ на сѣкущей, проведенной произ-*

---

[37]) Оливье, профессоръ въ *école des arts et manufactures*, употреблялъ уже этотъ способъ для проведенія касательной къ Архимедовой спирали. (*Bulletin de la Société philomatique de Paris*, année 1833, p. 22).

вольно въ той же плоскости, четыре отрѣзка, которые имѣютъ между собою опредѣленное постоянное отношеніе, каково бы ни было положеніе сѣкущей. Пусть a, b, c, d будутъ точки, въ которыхъ четыре прямыя встрѣчаются съ произвольною сѣкущей, и ac, ad, bc, bd четыре отрѣзка: отношеніе $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ остается то же, какова бы ни была сѣкущая.

Мы посвящаемъ этой теоремѣ весь настоящій параграфъ, чтобы обратить на нее все вниманіе нашихъ читателей. Теоремы **136**, **137**, **140**, **142** и **145** суть или частные случаи, или предложенія обратныя этой главной теоремы. Изъ того, что она повторена у Паппа въ столь различныхъ видахъ, слѣдуетъ предполагать, что для поризмъ Евклида она имѣла особенное значеніе. Теперь же она остается безъ примѣненій.

Справляясь о тѣхъ новыхъ геометрахъ, которые употребляли эту теорему, мы найдемъ, что Паскаль въ *Essai pour les coniques* считаетъ ее главною теоремою, которою онъ пользовался въ своемъ *Traité* о коническихъ сѣченіяхъ; далѣе, что Дезаргъ принялъ за основаніе своей теоріи перспективы (*édition de Bosse*, 1648, p. 336) частный случай этой теоремы (именно 137-ю теорему Паппа) и что Р. Симсонъ доказалъ эту лемму Паппа и пользовался ею для доказательства одного предложенія въ *Traité des porismes*. Въ послѣднее время Бріаншонъ упоминаетъ объ ней въ мемуарѣ о линіяхъ втораго порядка и Понселе приводитъ ее въ *Traité des propriétés projectives* (стр. 12). Но оба эти искусные геометра не дѣлаютъ изъ нея никакаго особаго употребленія и подробно занимаются только частнымъ случаемъ, когда четыре линіи образуютъ гармоническій пучекъ.

Вслѣдствіе этого намъ кажется, что теорема эта недостаточно обратила на себя вниманіе геометровъ.

Мы думаемъ однако, что она способна къ многочисленнымъ приложеніямъ и можетъ сдѣлаться самою полезною и богатою слѣдствіями теоремою геометріи. Она играетъ важную роль въ нашихъ принципахъ двойственности и преобразованія фигуръ, составляя основное начало той ихъ стороны, которая касается количествен-

ныхъ соотношеній. Мы будемъ также ею пользоваться въ этомъ сочиненіи; поэтому считаемъ необходимымъ назвать особымъ именемъ отношеніе четырехъ отрѣзковъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь. Въ частномъ случаѣ, когда это отношеніе равно единицѣ, оно получило названіе *гармоническаго* отношенія; въ общемъ случаѣ мы будемъ называть его *ангармоническимъ отношеніемъ*, или *ангармоническою функціею*. Такимъ образомъ, если четыре прямыя, выходящія изъ одной точки, пересѣчены трансверсалью въ точкахъ a, b, c, d, то отношеніе $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ будетъ ангармоническая функція четырехъ точекъ a, b, c, d.

Теорема Паппа заключается въ томъ, что *эта функція сохраняетъ постоянно одну и ту же величину, каково бы ни было положеніе трансверсали*, если только прямыя, проходящія черезъ одну точку, остаются тѣ же. Таково прекрасное свойство ангармонической функціи четырехъ точекъ, отличающее ее отъ всякой другой функціи, составленной изъ отрѣзковъ между четырьмя точками.

Намъ кажется, что понятіе объ ангармонической функціи должно привести къ значительному упрощенію большинства геометрическихъ задачъ и что оно, гораздо лучше Птоломеевой теоремы, можетъ служить основаніемъ теоріи трансверсалей. Съ помощію его получается наглядное доказательство всѣхъ извѣстныхъ теоремъ о системѣ прямыхъ линій и выводится много новыхъ теоремъ. Особенно будетъ оно полезно въ теоріи коническихъ сѣченій, указывая связь между множествомъ отдѣльно стоящихъ теоремъ и соотношеній, которыя всѣ такимъ образомъ будутъ приведены къ небольшому числу основныхъ предложеній.

Мы намѣрены посвятить теоріи ангармоническаго отношенія особое сочиненіе; но нѣкоторыя главныя теоремы и въ особенности другую алгебраическую форму, въ которой можетъ представляться теорема Паппа, мы сообщимъ теперь же, и для этого отсылаемъ читателей къ Примѣчанію IX.

31. Возвращаемся къ Паппу. Теорема 130-я представляетъ соотношеніе между шестью отрѣзками, образуемыми на сѣкущей че-

тырьмя сторонами и двумя діагоналями четыреугольника. Теоремы 127-я и 128-я суть частные случаи 130-й.

Чертежъ въ сочиненіи Паппа, представляющій четыре стороны и двѣ діагонали четыреугольника, пересѣченныя трансверсалью, можно также разсматривать, какъ три стороны треугольника, къ вершинамъ котораго изъ одной точки проведены три другія прямыя. Эти шесть прямыхъ образуютъ на трансверсали шесть отрѣзковъ, изъ которыхъ каждый заключается между стороною треугольника и одною изъ линій, проведенныхъ черезъ вершины, лежащія на этой сторонѣ. При такомъ толкованіи теорему Паппа легко выразить словами и удержать въ памяти: она заключается въ томъ, что *произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общихъ конечныхъ точекъ, равно произведенію трехъ остальныхъ*; это соотношеніе сходно съ тѣмъ, которое составляетъ Птоломееву теорему. Разсматриваемая съ этой точки зрѣнія, теорема Паппа можетъ быть употребляема для доказательства, что три линіи, извѣстнымъ образомъ проведенныя черезъ вершины треугольника, проходятъ черезъ одну и ту же точку; подобно тому, какъ употребляется Птоломеева теорема для доказательства, что три точки, расположенныя извѣстнымъ образомъ на сторонахъ треугольника, лежатъ на одной прямой.

Теорема 131-я показываетъ, что *въ каждомъ четыреугольникѣ діагональ дѣлится гармонически другою діагональю и линіею, соединяющею точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ.*

Въ предложеніи 132-мъ разсматривается особый случай этой теоремы, которая сама есть опять слѣдствіе общей 130-й теоремы. Теоремы 134, 138, 141 и 143 суть или обратныя предложенія, или частные случаи теоремы 139-й, въ которой доказывается, что *если шесть вершинъ шестиугольника лежатъ по три на двухъ прямыхъ линіяхъ, то точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой.* Это предложеніе замѣчательно не только само по себѣ, но и потому, что на него можно смотрѣть, какъ на первый шагъ къ знаменитой теоремѣ Паскаля о шестиугольникѣ, вписанномъ въ коническое сѣченіе. Вмѣсто системы двухъ прямыхъ, въ которую Паппъ вписываетъ шестиугольникъ, въ теоремѣ

Паскаля входитъ какое бы то ни было коническое сѣченіе[38]). Приведенная выше 130-я теорема допускаетъ подобное же обобщеніе, на которое мы укажемъ, когда будемъ говорить о Дезаргѣ.

Въ предисловіи Паппъ приводитъ, какъ обобщеніе одной поризмы Евклида, прекрасную теорему о видоизмѣненіи многоугольника, стороны котораго проходятъ черезъ точки, лежащія на одной прямой, когда вершины его, за исключеніемъ одной, перемѣщаются по произвольнымъ прямымъ. Эта теорема получила въ послѣднемъ столѣтіи нѣкоторую извѣстность, благодаря новому обобщенію, данному ей Маклореномъ и Брайкенриджемъ, и благодаря соперничеству, которое она возбудила между этими замѣчательными геометрами. Понселе вновь изслѣдовалъ этотъ предметъ съ полнотою и ясностію, составляющими принадлежность его ученаго труда: *Traité des propriétés projectives de figures* (отд. 4, гл. II и III).

32. Мы должны упомянуть еще объ одномъ изслѣдованіи, которое, подобно предыдущимъ, относится къ теоріи трансверсалей; это знаменитая задача *ad tres aut plures lineas*, о которой Паппъ говоритъ, какъ о камнѣ преткновенія для древнихъ, и которая обязана новою извѣстностію Декарту, сдѣлавшему изъ нея первое приложеніе своей геометріи. Задача эта состоитъ въ томъ, чтобы

---

[38]) 139-я теорема Паппа, выражающая въ вышеприведенной формѣ свойство шестиугольника, вписаннаго между двумя прямыми, можетъ быть разсматриваема съ иной точки зрѣнія, и тогда изъ нея проистекаетъ другое замѣчательное предложеніе, выведенное въ первый разъ Симсономъ, какъ одна изъ поризмъ Евклида; къ этому предложенію относятся слова Паппа: *Quod haec ad datum punctum vergit*. Оно заключается въ слѣдующемъ. «Если возьмемъ на плоскости двѣ неподвижныя точки и уголъ, вершина котораго лежитъ на линіи, соединяющей эти точки, потомъ будемъ изъ каждой точки нѣкоторой данной прямой проводить линіи къ двумъ неподвижнымъ точкамъ, то каждая пара этихъ линій будетъ пересѣкаться съ сторонами даннаго угла соотвѣтственно въ двухъ точкахъ, причемъ прямыя, соединяющія эти точки, пройдутъ черезъ одну и ту же точку.» (*Simson, de Porismatibus,* предл. 34). Мы упоминаемъ объ этой теоремѣ, потомучто она будетъ нужна намъ впослѣдствіи. Подобная теорема въ пространствѣ, до сихъ поръ еще никѣмъ не указанная, выводится, какъ естественное слѣдствіе нашего принципа преобразованія фигуръ.

по нѣсколькимъ даннымъ прямымъ найти геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ то свойство, что если изъ нихъ на данныя прямыя проведемъ перпендикуляры, или вообще линіи подъ данными углами, то произведеніе нѣкоторыхъ изъ этихъ линій находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію остальныхъ.

Эта задача, получившая со времени Декарта названіе *задачи Паппа*, уже испытала на себѣ глубину соображенія Евклида и Аполлонія. Они рѣшили ее только для трехъ и четырехъ прямыхъ и нашли, что въ этомъ случаѣ искомое геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе; отсюда проистекаетъ слѣдующее общее свойство этихъ кривыхъ: если въ коническое сѣченіе вписанъ какой-нибудь четыреугольникъ, то произведеніе разстояній каждой точки кривой отъ двухъ противоположныхъ сторонъ находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній той же точки отъ двухъ другихъ сторонъ.

Ньютонъ далъ чисто геометрическое доказательство этой прекрасной теоремы и съ выгодою употреблялъ ее въ *Principia mathematica philosophiae naturalis*. Сочиненія о коническихъ сѣченіяхъ, появившіяся вскорѣ послѣ этого знаменитаго сочиненія Ньютона, заимствовали изъ него эту теорему, но не извлекли изъ нея всѣхъ приложеній, къ которымъ она способна; позднѣе она какъ бы совершенно исчезла изъ теоріи коническихъ сѣченій [39]). А между тѣмъ, по нашему мнѣнію, она представляетъ самое общее и плодовитое свойство этихъ кривыхъ. Достаточно сказать, что изъ нея, какъ прямыя слѣдствія, проистекаютъ слѣдующія теоремы: извѣстный мистическій шестиугольникъ Паскаля, теорема Дезарга объ

---

[39]) Безполезность, въ которой цѣлые вѣка оставалась эта основная теорема, тогда какъ изъ нея могутъ быть выведены почти всѣ свойства коническихъ сѣченій, и незначительная важность, которая до самаго послѣдняго времени приписывалась прекраснымъ теоремамъ Дезарга и Паскаля, представляющимъ естественное слѣдствіе предыдущей, приводятъ намъ на память справедливое замѣчаніе Бальи: «кажется, что идеи, также какъ и мы сами, имѣютъ время дѣтства и первоначальной слабости; онѣ не могутъ выказаться вполнѣ при самомъ появленіи, но только возрасту и времени обязаны бываютъ своею плодотворною силой.» (*Bailly*: *Histoire de l'astronomie moderne*, t. II, p. 60).

инволюціи шести точекъ; постоянное отношеніе между произведеніемъ ординатъ и произведеніемъ отрѣзковъ главной оси; прекрасная теорема Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій; наконецъ еще одна теорема, основывающаяся на понятіи объ *ангармоническомъ* отношеніи, изъ которой проистекаетъ множество свойствъ коническихъ сѣченій. Кстати прибавимъ здѣсь, что эта послѣдняя теорема обладаетъ сама по себѣ такою общностію и такъ просто доказывается *a priori,* что мы предполагаемъ принять ее за основное предложеніе теоріи коническихъ сѣченій (см. Примѣчаніе XV).

33. Считаемъ умѣстнымъ сдѣлать здѣсь еще одно необходимое замѣчаніе; оно можетъ служить оправданіемъ важности, которую мы старались придать 129-й теоремѣ Паппа и понятію объ ангармоническомъ отношеніи. Всѣ теоремы, указанныя нами въ 7-й книгѣ «Математическаго Собранія», между прочимъ теорема о видоизмѣненіи многоугольника, теорема *ad quatuor lineas* и многія теоремы объ инволюціи шести точекъ, о которыхъ мы тотчасъ будемъ говорить; всѣ эти теоремы, отличающіяся большою общностію и важнымъ значеніемъ для новѣйшей геометріи, могутъ быть выведены изъ одного источника:— изъ одного свойства ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ. Такой способъ ихъ полученія есть вмѣстѣ съ тѣмъ самый простой, потомучто при этомъ не требуется, можно сказать, никакого доказательства.

Прибавимъ къ этому еще слѣдующее. Узнавъ, что большая часть леммъ Паппа, относящихся по всей вѣроятности къ первой книгѣ поризмъ Евклида, можетъ быть выведена изъ одной теоремы, о которой здѣсь идетъ рѣчь, мы думаемъ, что эта же теорема будетъ служить ключемъ ко всей первой книгѣ поризмъ и что она приведетъ къ разъясненію предложеній, оставленныхъ намъ Паппомъ; потомучто во всякой теоріи существуетъ основная истина, изъ которой проистекаютъ всѣ остальныя. И въ самомъ дѣлѣ, принявъ эту теорему за точку отправленія при разъясненіи поризмъ, мы получили нѣсколько теоремъ, которыя, какъ намъ кажется, соотвѣтствуютъ этого рода предложеніямъ.

34. Упомянемъ еще изъ 7-й книги «Математическаго Собранія» о 40 леммахъ, относящихся къ сочиненію Аполлонія *de deter-*

minata sectione и принадлежащихъ къ новѣйшимъ геометрическимъ ученіямъ. Эти леммы представляютъ соотношенія между отрѣзками, образуемыми нѣсколькими точками на одной прямой.

Съ самаго начала нельзя скоро понять, въ чемъ заключается истинное значеніе этихъ многочисленныхъ предложеній и какое отношеніе всѣ они имѣютъ къ вопросу; отъ этого пониманіе ихъ вначалѣ затруднительно. Но при нѣкоторомъ вниманіи мы узнаемъ, что они относятся къ теоріи *инволюціи* шести точекъ, теоріи, созданной Дезаргомъ и принесшей великую пользу новой геометріи. Эти леммы еще не содержатъ въ себѣ самаго общаго инволюціоннаго соотношенія между шестью точками (кажется даже, древніе вовсе не знали преобразованій этого общаго отношенія), но представляютъ свойства многихъ соотношеній, которыя теперь разсматриваются какъ частные случаи общаго соотношенія. Такъ, въ теоремахъ 22, 29, 30, 32, 34, 35, 36 и 44 разсматривается инволюція пяти точекъ. Онѣ относятся къ двумъ системамъ двухъ *сопряженныхъ* [40]) точекъ и къ ихъ *центру,* который есть такая точка, что произведеніе разстояній ея отъ двухъ первыхъ точекъ равно произведенію разстояній ея же отъ двухъ другихъ; отсюда же проистекаетъ и другое соотношеніе между пятью точками.

Чтобы получить эти предложенія изъ общаго соотношенія между шестью точками, достаточно замѣтить, что точка, сопряженная пятой точкѣ, т. е. центру, находится въ безконечности.

Теоремы 37 и 38 имѣютъ предметомъ инволюцію четырехъ точекъ, именно двухъ сопряженныхъ, одной изъ двойныхъ и центра.

Теоремы 39 и 40 выражаютъ свойство инволюціи пяти точекъ: двухъ паръ сопряженныхъ точекъ и одной изъ двойныхъ.

Теоремы 41, 42, 43 представляютъ соотношеніе между двумя парами сопряженныхъ точекъ и центромъ: это соотношеніе новое и по формѣ оно отличается отъ извѣстнаго соотношенія между шестью точками.

---

[40]) Чтобы легче понять эти замѣчанія объ леммахъ Паппа, слѣдуетъ прочесть Примѣчаніе X, въ которомъ мы показываемъ различныя свойства инволюціоннаго соотношенія шести точекъ, т. е. различныя преобразованія и слѣдствія этого соотношенія. Тамъ же объяснено, что слѣдуетъ разумѣть подъ сопряженными точками, центромъ и двойными точками.

Двѣнадцать теоремъ 45—56 содержатъ въ себѣ также общее соотношеніе между двумя парами сопряженныхъ точекъ, центромъ и еще какою-нибудь точкой. Теоремы 41, 42 и 43 представляютъ слѣдствія предыдущихъ, какъ болѣе общихъ.

Наконецъ, теоремы 61, 62 и 64 выражаютъ собою любопытное свойство наибольшихъ и наименьшихъ по отношенію къ двумъ парамъ сопряженныхъ точекъ и къ двойной точкѣ; это свойство состоитъ въ томъ, что отношеніе произведеній разстояній двойной точки отъ сопряженныхъ точекъ есть наибольшее или наименьшее.

Посредствомъ весьма красиваго построенія Паппъ даетъ геометрическое выраженіе этого отношенія и говоритъ только, что оно есть наибольшее или наименьшее, доказательство же находилось въ самомъ сочиненіи Аполлонія. Утрата геометрическаго доказательства въ этой задачѣ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ, въ томъ видѣ, какъ оно было дано самими древними, есть истинная для насъ потеря; хотя оно и для новаго анализа не представляетъ никакихъ затрудненій. Этотъ вопросъ былъ однимъ изъ первыхъ, послужившихъ Фермату приложеніемъ его превосходнаго способа *de maximis et minimis*. (*Opera mathematica*, p. 67).

35. Намъ кажется, что предложенный нами разборъ 43 леммъ Паппа знакомитъ съ ихъ общимъ характеромъ и можетъ облегчить ихъ пониманіе. Мы видимъ, что одна и та же теорема высказывается обыкновенно во многихъ отдѣльныхъ предложеніяхъ, и это зависитъ единственно отъ того, что различные способы выраженія предложеній соотвѣтствуютъ особымъ чертежамъ, различающимся между собою только положеніемъ разсматриваемыхъ точекъ. Это различіе въ относительномъ положеніи данныхъ и искомыхъ точекъ послужило поводомъ къ самому названію сочиненія Аполлонія: *de sectione determinata*; разные же случаи, представляющіеся при различномъ положеніи точекъ, этотъ геометръ, а за нимъ и Паппъ, обозначали именемъ ἐπίταγμα [41]).

[41]) Таково мнѣніе Галлея и Р. Симсона. Ученый Коммандинъ не могъ опредѣлить значенія этого слова, употребляемаго въ нѣкоторыхъ теоремахъ Аполлонія (Collect. math. стр. 296 въ изд. 1660 г.). Слово μοναχοί, встрѣчающееся также у Паппа, употреблялось, какъ кажется, Аполлоніемъ для обозначенія теоремъ, относящихся къ *maxima* и *minima*.

Одно изъ важнѣйшихъ преимуществъ новѣйшей геометріи передъ древней заключается въ томъ, что она, благодаря употребленію положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, обнимаетъ въ *одномъ* выраженіи всѣ особые случаи теоремы, каковы бы ни были относительныя положенія частей фигуры. Такимъ образомъ въ настоящее время девять главныхъ задачъ, составлявшихъ вмѣстѣ съ ихъ многочисленными частностями 83 теоремы въ двухъ книгахъ *de sectione determinata*, представляютъ *одну* задачу, разрѣшаемую помощію *только одной* формулы.

Многіе писавшіе о геометрическомъ анализѣ древнихъ занимались сочиненіемъ *de sectione determinata*, частію пытаясь вполнѣ возстановить обѣ книги, частію разрѣшая отдѣльныя задачи. Таковы въ XVII столѣтіи: Снеллій, Александръ Андерсонъ, Марини, Гетальди; къ концу того же столѣтія: Рожеръ Винтимилья, Гуго Омерикъ; потомъ Р. Симсонъ въ оставшемся послѣ него трудѣ *Opera reliqua* 1776 г. и около того же времени Джіаннини въ *Opuscula mathematica*.

Въ послѣднее время Лесли посвятилъ также нѣсколько страницъ этой задачѣ въ *Geometrical Analysis* (кн. 2, теор. 10—18). Его изслѣдованіе тѣсно связано съ теоріею инволюціи шести точекъ и рѣшеніе, какъ кажется, выведено изъ этой теоріи. Дѣйствительно, одно новое свойство инволюціи прямо привело насъ къ простому и общему построенію задачи *de sectione determinata*, рѣшенію, кажется, отличающемуся отъ всѣхъ прежнихъ. Та же теорія ведетъ къ доказательству изслѣдованнаго Аполлоніемъ случая наибольшихъ. (См. Примѣчаніе X).

36. Леммы Паппа къ *плоскимъ мѣстамъ* Аполлонія представляютъ также нѣкоторыя соотношенія между отрѣзками, образуемыми точками прямой линіи; но эти соотношенія отличаются отъ предыдущихъ и не могутъ быть выведены изъ общаго выраженія инволюціи шести точекъ. Но и *они* могутъ быть приведены къ одной теоремѣ, выражающей общее свойство четырехъ точекъ, расположенныхъ произвольно на прямой линіи: эта теорема есть вторая общая теорема Стеварта [42]).

---

42) *Some general theorems of considerable use in the Higher parts of ma-*

Предложенія 123 и 124, представляющія соотношеніе между четырьмя произвольными точками прямой и извѣстнымъ образомъ взятой пятой точкой, суть очень простыя слѣдствія этой теоремы.

Предложеніями 125 и 126 выражается соотношеніе между четырьмя произвольными точками прямой и легко видѣть, что это есть ничто иное,- какъ въ высшей степени простое преобразованіе той же теоремы.

Четыре предложенія 119—122, которыя вмѣстѣ съ четырьмя предыдущими составляютъ всѣ восемь леммъ Паппа къ плоскимъ мѣстамъ Аполлонія, относятся къ треугольнику; весьма замѣчательно, что эти четыре предложенія, повидимому совершенно отличныя отъ предыдущихъ и не имѣющія съ ними никакой связи, являются опять слѣдствіями той же теоремы Стеварта.

37. Предпринявъ возстановленіе поризмъ Евклида и сочиненій Аполлонія *de sectione determinata* и *de locis planis,* Р. Симсонъ доказалъ въ отдѣльности многочисленныя леммы, относящіяся къ этимъ сочиненіямъ. Мы видѣли выше, что всѣ эти леммы можно привести къ немногимъ предложеніямъ и тѣмъ значительно облегчить подобную работу; но такого рода обобщеніе не было еще въ духѣ геометріи во время Р. Симсона (съ тѣхъ поръ прошло около ста лѣтъ), а если бы и было, то оно не соотвѣтствовало бы цѣли этого искуснаго и глубокомысленнаго геометра, рѣшившагося прослѣдить шагъ за шагомъ каждое слово и каждое указаніе Паппа.

38. Остальныя леммы 7-й книги Математическаго Собранія, которыя мы пройдемъ молчаніемъ, имѣютъ меньшій интересъ. Это совершенно отдѣльныя предложенія, относящіяся къ кругу, треугольнику и къ коническимъ сѣченіямъ, и не представляющія никакой трудности. Онѣ назначены для поясненія сочиненій: *de inclinationibus*, *de tactionibus* и *octo libri conicorum* Аполлонія и *libri duo locorum ad superficiem* Евклида.

Изъ леммъ, относящихся къ книгѣ *de tactionibus*, приведемъ только слѣдующую задачу, очень просто разрѣшенную Паппомъ: «чрезъ три данныя на прямой линіи точки провести три прямыя такъ,

---

thematics. Edinburg, 1746, in 8⁰.—Мы приведемъ эту теорему въ четвертой эпохѣ, когда будемъ говорить о Стевартѣ.

чтобы образующійся изъ нихъ треугольникъ былъ вписанъ въ данномъ кругѣ» (теор. 117). Теоремы 105, 107 и 108 суть особые случаи этой задачи, въ которыхъ одна изъ трехъ данныхъ точекъ предполагается на безконечномъ разстояніи.

Если предположимъ, что положеніе трехъ данныхъ точекъ совершенно произвольно, то получимъ болѣе общую задачу, знаменитую и по ея трудности, и по именамъ тѣхъ геометровъ, которые ею занимались, и въ особенности по тому, что самое общее и простое рѣшеніе ея было найдено неаполитанскимъ шестнадцатилѣтнимъ юношею Олтаяно (Oltajano). (См. Примѣчаніе XI).

Приведемъ наконецъ еще 238-ю и послѣднюю лемму, относящуюся къ *loci ad superficiem* и выражающую свойство директрисъ во всѣхъ трехъ видахъ коническихъ сѣченій. «Разстоянія каждой точки коническаго сѣченія отъ фокуса и отъ директрисы находятся въ постоянномъ отношеніи.» Этой прекрасной теоремы нѣтъ въ коническихъ сѣченіяхъ Аполлонія.

39. Въ 8-й книгѣ «Математическаго Собранія» говорится главнымъ образомъ о машинахъ, которыя употреблялись въ практической механикѣ, и о примѣненіи ихъ къ органическому образованію кривыхъ линій. Тутъ же встрѣчаются различныя геометрическія предложенія; изъ нихъ наиболѣе замѣчательна теорема о центрѣ тяжести треугольника, которую можно выразить такъ: «если три тѣла, помѣщенныя первоначально въ вершинахъ треугольника, оставляютъ ихъ въ одно и то же время и движутся въ одномъ и томъ же направленіи по сторонамъ треугольника съ скоростями пропорціональными длинѣ соотвѣтствующихъ сторонъ, то центръ тяжести остается неизмѣннымъ».

Новѣйшіе геометры распространили эту теорему на всякій многоугольникъ, плоскій или косой. Въ изданіи *Récreations mathématiques d'Ozanam* Монтукла доказалъ ее при помощи механическихъ соображеній и думалъ, что чисто геометрическое рѣшеніе представляетъ значительныя трудности. Рѣшеніе, данное Паппомъ, основывается на знаменитой Птоломеевой теоремѣ объ отрѣзкахъ, образуемыхъ сѣкущею на трехъ сторонахъ треугольника. Паппъ при доказательствѣ считаетъ эту послѣднюю теорему извѣстною и потомъ, позднѣе, доказываетъ ее.

40. Теорема 14-я той же книги доставляетъ очень простое рѣшеніе задачи: «по даннымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ эллипса опредѣлить величину и направленіе главныхъ осей». Паппъ даетъ построеніе этой задачи, но безъ доказательства. Доказательство было возстановлено Эйлеромъ, который показалъ кромѣ того много другихъ рѣшеній той же задачи (*Novi Commentarii Petropol.* t. III. 1750—1751). Другіе геометры рѣшали ту же задачу различными способами.

Рѣшивъ соотвѣтствующую задачу въ пространствѣ, т. е. задачу объ нахожденіи главныхъ осей эллипсоида по тремъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ, мы изъ нея извлекли новое построеніе осей эллипса, которое, кажется, превосходитъ всѣ степени простоты, уже достигнутыя во многихъ прежнихъ рѣшеніяхъ [43]). Вообще при изученіи геометріи мы часто имѣемъ случай замѣтить, что рѣшенія плоской геометріи, имѣющія себѣ соотвѣтственныя въ пространствѣ, всегда бываютъ самыя общія и простыя. Этотъ принципъ можетъ до извѣстной степени служить испытаніемъ и признакомъ того, достигли ли мы всевозможной общности и полноты рѣшенія; или, другими словами, попали ли мы на тотъ способъ, или путь, который прямо соотвѣтствуетъ вопросу.

Прибавленіе. Первое предложеніе IV-й книги «Математическаго Собранія» Паппа есть общее свойство треугольниковъ, которое авторъ представляетъ, какъ обобщеніе теоремы о квадратѣ гипотенузы прямоугольнаго треугольника. До сихъ поръ еще не было замѣчено, что это предложеніе есть ничто иное, только въ другой формѣ, какъ свойство параллелограммовъ, которое составляетъ въ механикѣ основаніе теоріи *моментовъ*; это свойство было открыто только въ началѣ послѣдняго столѣтія Вариньономъ, который представилъ его также какъ «нѣчто подобное 47-теоремѣ первой книги элементовъ Евклида (теоремѣ о квадратѣ гипотенузы)» и изложилъ его такимъ образомъ:

---

[43]) Пусть o будетъ центръ эллипса, oa и ob половины данныхъ сопряженныхъ діаметровъ; черезъ a проведемъ перпендикуляръ къ ob и отложимъ на немъ отрѣзки ae и ae_1, равные ob; потомъ проведемъ прямыя oe и oe_1: главныя оси эллипса дѣлятъ уголъ между этими прямыми и уголъ дополнительный пополамъ; большая ось равна полусуммѣ этихъ прямыхъ, а малая—ихъ полуразности.

Если на двухъ смежныхъ сторонахъ параллелограмма и на діагонали, выходящей изъ той же вершины, построимъ три треугольника, имѣющіе общую вершину въ какой нибудь точкѣ въ плоскости фигуры, то сумма, или разность, двухъ первыхъ треугольниковъ будетъ равна третьему треугольнику. (См. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1719).

Еще задолго до этого времени Вариньонъ доказалъ и употреблялъ въ механикѣ теорему о параллелограммѣ, очень извѣстную въ новѣйшей геометріи и которая въ сущности есть то же, что предыдущая, только въ другомъ видѣ; именно: *Если двѣ смежныя стороны параллелограмма и діагональ, выходящую изъ той же вершины проложимъ на какую нибудь прямую, то проэкція діагонали будетъ равна суммѣ, или разности, проэкцій сторонъ* (См. *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in-4°, 1687, p. 189).

41. Въ предисловіи къ 7-й книгѣ «Математическаго Собранія» находится ясное опредѣленіе анализа и синтеза, не оставляющее никакого сомнѣнія относительно точнаго и опредѣленнаго характера этихъ двухъ методовъ; тѣмъ болѣе, что Паппъ въ этой книгѣ даетъ часто примѣры того и другаго въ примѣненіи къ одной и той же задачѣ.

Послѣ этого опредѣленія Паппъ перечисляетъ сочиненія о *locus resolutus*, по собственному выраженію древнихъ. Этимъ именемъ обозначились тѣ предметы, которые долженъ былъ знать всякій, кто желалъ умѣть разрѣшать задачи. Эти сочиненія большею частію относились къ геометрическому анализу и вотъ, по указанію Паппа, заглавія ихъ: одна книга *Data* Евклида; двѣ книги *de sectione rationis*, двѣ книги *de sectione spatii* и двѣ книги *de tactionibus* Аполлонія; три книги *Porismata* Евклида; двѣ книги *de inclinatione*, двѣ книги *de locis planis* и восемь книгъ *Conica* Аполлонія; пять книгъ *de locis solidis* древняго Аристея; двѣ книги *de locis ad superficiem* Евклида; двѣ книги *de media ratione* Эратосѳена. Къ этому перечню должно еще присоединить двѣ книги *de sectione determinata* Аполлонія, о которыхъ Паппъ говоритъ позднѣе. Изъ всѣхъ этихъ сочиненій до насъ дошли только *Data* Евклида, семь книгъ *Conica* и послѣдній отдѣлъ книги *de sectione determi-*

nata Аполлонія. Остальныя, на основаніи того, что о нихъ говоритъ Паппъ, были возстановлены въ духѣ древности различными геометрами XVI и XVII столѣтія.

42. Любовь къ геометріи древнихъ, около вѣка тому назадъ такъ много способствовавшая въ возвышенію математическихъ наукъ, особенно въ отечествѣ Ньютона, съ тѣхъпоръ значительно уменьшилась и, быть можетъ, исчезла бы совсѣмъ, еслибы ей не оставались вѣрны итальянскіе геометры. Мы обязаны въ наше время Ферголѣ и ученикамъ его Бруно, Флаути и Скорца важными сочпненіями о геометрическомъ анализѣ древнихъ, который возстановленъ ими въ первоначальной чистотѣ. Творенія древнихъ объ этомъ предметѣ, названія которыхъ мы только что выписали у Паппа, составляли *дополненія* къ геометріи, которыя безъ сомнѣнія ускорили бы движеніе науки еслибы сохранились въ полнотѣ до времени возрожденія наукъ. Въ новѣйшей геометріи вовсе нѣтъ подобныхъ *дополненій* и мы чувствуемъ, что вслѣдствіе значительныхъ успѣховъ и усовершенствованій въ этой наукѣ, эти дополненія должны бы основываться на совершенно иныхъ началахъ, а не на началахъ греческой школы. Они должны бы прежде всего носить на себѣ отпечатокъ простоты и общности, которыя составляютъ главный характеръ новой геометріи.

43. Почти въ одно время съ Паппомъ жилъ еще геометръ **Серенъ**, который пріобрѣлъ себѣ нѣкоторую извѣстность сочиненіемъ о *сѣченіи цилиндра и конуса* въ двухъ книгахъ [44]); въ немъ онъ доказалъ, вопреки мнѣнію большинства геометровъ своего времени, тождество эллипсовъ, получаемыхъ отъ пересѣченія косыхъ конусовъ и цилиндровъ съ круглыми основаніями.

Въ первой книгѣ слѣдуетъ особенно замѣтить двѣ задачи, потомучто рѣшеніе ихъ такъ просто и красиво, что лучшаго нельзя и желать: «косой конусъ съ круглымъ основаніемъ пересѣченъ по эллипсу: требуется провести чрезъ этотъ эллипсъ цилиндръ, основаніемъ котораго былъ бы также кругъ, лежащій въ одной плоскости съ основаніемъ конуса» (теор. 20). И обратно: «данъ цилиндръ, пересѣченный по эллипсу и т. д.» (теор. 21).

---

44) Галлей напечаталъ обѣ эти книги на греческомъ и на латинскомъ языкахъ, какъ вступленіе къ его изданію коническихъ сѣченій Аполлонія.

Серенъ, подобно Аполлонію, предполагаетъ, что сѣкущая плоскость перпендикулярна къ осевому треугольнику конуса; замѣтимъ здѣсь, что съ этихъ поръ до новаго времени мы не встрѣчаемъ болѣе ни одного сочиненія о коническихъ сѣченіяхъ; а потому мы должны предположить, что древніе получали эти кривыя только такимъ частнымъ способомъ, т. е. посредствомъ плоскостей перпендикулярныхъ къ осевому треугольнику; вопроса же о кривыхъ, получаемыхъ при какомъ нибудь произвольномъ сѣченіи, они не изслѣдовали, или по крайней мѣрѣ не разрѣшили. Можетъ-быть этотъ вопросъ представлялъ имъ такія трудности, побѣдить которыя удалось только новымъ геометрамъ. Мы увидимъ, что честь этого важнаго шага въ теоріи коническихъ сѣченій принадлежитъ прежде всѣхъ Дезаргу, за которымъ слѣдовали Паскаль и потомъ Де-Лагиръ.

Сверхъ того мы должны замѣтить, что самый конусъ съ круглымъ основаніемъ, на которомъ древніе получали коническія сѣченія, во всемъ остальномъ былъ для нихъ чуждъ, такъ что кромѣ теоремъ объ его сѣченіяхъ они не знали ни одного свойства его. Только въ послѣднее время стали заниматься этимъ вопросомъ, представляющимъ новое поле для изысканій.

44. **Діоклесъ**, изобрѣтатель циссоиды, которою онъ пользовался для построенія двухъ среднихъ пропорціональныхъ, жилъ около вѣка послѣ Паппа. Мы имѣемъ данное имъ посредствомъ коническихъ сѣченій рѣшеніе трудной задачи о раздѣленіи шара плоскостію въ данномъ отношеніи, задачи, изслѣдованіемъ которой занимался Архимедъ, не оставившій однако обѣщаннаго построенія. Такъ какъ эта задача зависитъ отъ уравненія третьей степени и слѣдовательно можетъ быть построена только посредствомъ коническихъ сѣченій, или кривыхъ высшаго порядка, то весьма вѣроятно, что Архимедъ, всегда употреблявшій для рѣшенія только циркуль и линейку, не захотѣлъ продолжать этого изслѣдованія, хотя и обѣщалъ дать рѣшеніе [45]). Построеніе Діоклеса передано

---

45) Эта задача заключается въ 5-мъ предложеніи второй книги о шарѣ и цилиндрѣ. Она послужила Пуансо поводомъ къ интересному замѣчанію,

намъ Евтоціемъ въ его комментаріѣ на вторую книгу Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ.

45. Около средины V столѣтія математикою занимался знаменитый философъ **Проклъ**, представитель древней платоновой школы въ Аѳинахъ, и своими сочиненіями и поученіями имѣлъ существенное вліяніе на поддержаніе значенія этой науки еще на нѣкоторое время.

Отъ этого геометра намъ остался только комментарій къ первой книгѣ Евклида, въ которомъ заключаются весьма любопытныя примѣчанія, относящіяся къ исторіи и метафизикѣ геометріи. Здѣсь находимъ мы черченіе эллипса посредствомъ непрерывнаго движенія точки, лежащей на прямой линіи, концы которой скользятъ по сторонамъ даннаго угла [46]).

Изъ философовъ, слѣдовавшихъ за Прокломъ и принадлежавшихъ къ его школѣ, мы упомянемъ о тѣхъ, которые оказали какія нибудь услуги геометріи; вопервыхъ о Маринѣ, издавшемъ предисловіе, или введеніе, къ книгѣ *Data* Евклида, гдѣ онъ указываетъ свойства и приложенія этихъ теоремъ; потомъ объ Исидорѣ Милетскомъ, который былъ одинаково свѣдущъ въ геометріи, механикѣ и строительномъ искуствѣ; онъ изобрѣлъ инструментъ для непрерывнаго черченія параболы, при помощи которой рѣшилъ задачу о удвоеніи куба. Вмѣстѣ съ построеніемъ эллипса, которое было найдено Прокломъ, это первые примѣры органическаго образованія коническихъ сѣченій, сдѣлавшагося предметомъ особаго изученія у новыхъ геометровъ. Инструментъ этотъ, по словамъ Евтоція, походилъ на греческую букву λ.

Евтоцій (около 450 г.), ученикъ Исидора, оставилъ намъ комментаріи къ коническимъ сѣченіямъ Аполлонія и къ нѣкоторымъ книгамъ Архимеда. Комментарій его ко второй книгѣ *о шарѣ и цилиндрѣ* имѣетъ особенную важность для исторіи науки, потомучто въ немъ

находящемуся въ *Commentaire de Peyrard, sur les oeuvres d'Archiméde* (стр. 462) и въ которомъ показано геометрическое значеніе корней, не относящихся къ задачѣ о шарѣ; именно: всѣ корни относятся къ болѣе общему вопросу, обнимающему въ одно время и шаръ и гиперболоидъ вращенія.

[46]) Комментарій къ 4-му опредѣленію первой книги Евклида.

находятся отрывки изъ древнѣйшихъ извѣстныхъ намъ писателей, сочиненія которыхъ до насъ не дошли. Эти отрывки относятся къ задачамъ объ удвоеніи куба и о двухъ среднихъ пропорціональныхъ. Въ началѣ этой главы мы назвали писателей, о которыхъ упоминаетъ Евтоцій, какъ о занимавшихся этими двумя вопросами. Здѣсь же Евтоцій по поводу рѣшенія Менехма говоритъ объ инструментѣ, изобрѣтенномъ Исидоромъ для черченія параболы непрерывнымъ движеніемъ.

46. Труды только что названныхъ математиковъ были послѣдними изъ тѣхъ, которые составляютъ славу Александрійской школы. Искуства и науки клонились уже къ упадку, когда Египетъ сдѣлался добычею Арабовъ и когда пожаръ великолѣпной библіотеки Птоломеевъ, этой драгоцѣнной сокровищницы всѣхъ произведеній генія и образованности десяти столѣтій, послужилъ сигналомъ къ варварству и долгой тьмѣ, объявшей умъ человѣческій.

Между тѣмъ, спустя одинъ или два вѣка, сами Арабы поняли свое невѣжество и предприняли снова возстановить науки. Отъ нихъ достались намъ частію въ подлинникѣ, частію въ переводѣ на ихъ языкъ, рукописи, сохранившіяся отъ ихъ фанатической ярости. Впрочемъ это почти единственная услуга, которую они намъ оказали. Въ ихъ рукахъ геометрія, за исключеніемъ вычисленія сферическихъ треугольниковъ, осталась на прежней степени развитія; въ своихъ собственныхъ трудахъ Арабы довольствовались тѣмъ, что удивлялись греческимъ сочиненіямъ и комментировали ихъ, какъ бы видя въ нихъ крайній и непреходимый предѣлъ науки.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ВТОРАЯ ЭПОХА.

1. Застой въ наукахъ у Арабовъ и другихъ народовъ продолжался послѣ разрушенія Александрійскаго музея около тысячи лѣтъ. Только въ срединѣ XV-го столѣтія вслѣдъ за всеобщимъ возрожденіемъ наукъ геометрія снова получаетъ свое значеніе. Ея успѣхи сначала были медленны, но геометрическія ученія очень скоро пріобрѣли характеръ общности и отвлеченности, котораго до тѣхъ поръ никогда не имѣли. Въ самомъ дѣлѣ, не одинъ изъ прежнихъ методовъ не допускалъ обобщенія и ограничивался только частными изслѣдованіями, которыми онъ былъ вызванъ: каждая кривая (а число ихъ было очень незначительно) разсматривалась отдѣльно и изслѣдовалась особымъ, только ей свойственнымъ, способомъ; такъ что свойства ея и пріемы, помощію которыхъ они получались, не могли служить къ открытію свойствъ другой кривой линіи. Примѣромъ можетъ служить знаменитая задача о касательныхъ, которая для отдѣльныхъ кривыхъ, напр., для коническихъ сѣченій и для Архимедовой спирали, разрѣшалась весьма глубокими, но существенно различными соображеніями, такъ что изъ нихъ нельзя было вывести ни какого указанія для рѣшенія той же задачи относительно другихъ кривыхъ.

Способъ истощенія, хотя и основывался на весьма общей идеѣ, не могъ избавить геометрію отъ этой ограниченности и спеціальности, потомучто ему недоставало общихъ пріемовъ для приложенія, и потому для него каждый частный случай являлся новою задачею, способы рѣшенія которой нужно было искать въ особенностяхъ соотвѣтствующаго чертежа. Тѣмъ не менѣе этотъ способъ дѣлаетъ величайшую честь древнимъ геометрамъ; въ немъ лежали зачатки цѣлаго ряда методовъ опредѣленія *квадратуръ*, методовъ, которые были долгое время предметомъ постоянныхъ стараній знаменитѣйшихъ геометровъ и которыхъ конечною цѣлію, или

лучше сказать торжествомъ, было изобрѣтеніе исчисленія безконечно малыхъ.

Эти соображенія, указывающія въ различіи между частнымъ и общимъ, между конкретнымъ и абстрактнымъ, главное различіе геометріи до XV столѣтія отъ позднѣйшей, заставляютъ насъ смотрѣть на всю первую эпоху, какъ на время подготовленія научнаго матеріала. Характеръ общности и отвлеченности, пріобрѣтаемый геометріею позднѣе, высказывается все болѣе и болѣе въ слѣдующихъ эпохахъ и въ настоящее время дѣлаетъ неизмѣримымъ разстояніе между современною геометріею и геометріею древнихъ.

2. Важнѣйшими открытіями при возрожденіи геометріи мы обязаны Вьету и Кеплеру, которые во многихъ отношеніяхъ были первыми виновниками нашего превосходства передъ древними. (См. Примѣчаніе XII).

Вьетъ (1540—1608). Для усовершенствованія платонова аналитическаго метода Вьетъ изобрѣлъ алгебру, или *logistica speciosa*, которой назначеніе заключалось въ приложеніи анализа къ наукѣ о числахъ; затѣмъ онъ ввелъ это удивительное вспомогательное средство также и въ науку о протяженіи и, показавъ графическое рѣшеніе уравненій второй и третьей степени, ознакомилъ геометровъ съ искуствомъ геометрическаго построенія алгебраическихъ выводовъ. Это былъ первый шагъ къ ближайшему соединенію алгебры съ геометріей,—шагъ, который привелъ Декарта къ блистательнымъ открытіямъ и сдѣлался ключемъ всей математики.

Мы обязаны Вьету ученіемъ о *sectiones angulares*, т. е. знаніемъ закона, по которому возрастаютъ, или уменьшаются, синусы, или хорды, кратныхъ дугъ, или кратныхъ частей ихъ.

Въ сочиненіяхъ этого великаго геометра мы находимъ также первую мысль о выраженіи площади кривой посредствомъ безконечнаго ряда членовъ.

Вьетъ обладалъ не менѣе глубокимъ знаніемъ геометріи древнихъ. Онъ возстановилъ сочиненіе Аполлонія *de tactionibus* подъ заглавіемъ *Apollonius Gallus*; здѣсь Вьетъ въ первый разъ рѣшилъ задачу, занимавшую въ то время геометровъ и представлявшую

большія трудности, именно задачу о построеніи круга, касающагося трехъ данныхъ на плоскости круговъ. Знаменитый Адріанъ Романъ (*Romanus*) рѣшилъ эту задачу только при помощи двухъ гиперболъ, что было ошибкою противъ требованій хорошаго пріема, такъ какъ для этого достаточно прямой линіи. Вьетъ взялся изслѣдовать вновь эту задачу (*Opera Vietae*, стр. 325, изданіе Шутена [*Schooten*], 1646). Съ тѣхъ поръ ею занимались многіе великіе геометры и предложили различныя рѣшенія, между которыми слѣдуетъ въ особенности упомянуть рѣшеніе Декарта, Ньютона [1]), Томаса Симпсона, Ламберта, Эйлера и Фусса. Для новѣйшихъ способовъ эта задача не представляетъ ничего труднаго; напротивъ того, получены рѣшенія, которыя и въ теоретическомъ и въ практическомъ отношеніи несравненно проще и красивѣе всѣхъ прежнихъ [2]); такъ что знаменитость этой задачи заключается теперь только въ именахъ, встрѣчающихся въ ея исторіи [3]).

Изъ трудовъ Вьета по геометріи слѣдуетъ особенно замѣтить сочиненіе его подъ заглавіемъ: *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, въ 20 главахъ, гдѣ изслѣдуются главнымъ образомъ рѣшенія сферическихъ треугольниковъ и рѣшенія задачъ о удвоеніи куба и о квадратурѣ круга. Древніе способы рѣшенія

---

1) Аналитическое рѣшеніе этой задачи находится въ *Arithmetica universalis* (зад. 47), а чисто геометрическое—въ 1-й книгѣ *Principia philosophiae naturalis* (лемма 16); послѣднее основано на двухъ гиперболахъ Адріана Романа, но Ньютонъ ихъ не строитъ для нахожденія точки пересѣченія, а опредѣляетъ вмѣсто этого двѣ прямыя, которыя должны проходить черезъ эту точку.

2) Простота построенія не потеряется даже, если мы обобщимъ задачу и вмѣсто круговъ возьмемъ коническія сѣченія. (См. Примѣчаніе XXVIII, гдѣ эта же задача изслѣдована для шаровъ и, еще общѣе, для поверхностей втораго порядка).

3) Камереръ (*Camerer*) около 40 лѣтъ тому назадъ издалъ весьма интересное сочиненіе, къ которому присоединено сочиненіе *Apollonius Gallus* Вьета; въ заглавіи указано все, содержащееся въ книгѣ, именно: *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime Lemmata Pappi in hos libros graece, nunc primum edita e codicibus mscptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus, ac problematis Apolloniani historia*. Gotae 1795, in 8°.

двухъ послѣднихъ знаменитыхъ задачъ, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи съ такою точностью и съ такимъ глубокимъ знаніемъ, что мы должны глубоко сожалѣть объ утратѣ остальныхъ частей сочиненія, которыя необходимо должны были предшествовать этой дошедшей до насъ книгѣ.

Сферическую тригонометрію Вьетъ пополнилъ весьма полезными открытіями; между ними должно упомянуть о рѣшеніи такихъ случаевъ, которые не имѣли прямаго приложенія въ астрономіи, напр. опредѣленіе угла по тремъ сторонамъ треугольника, и т. п. Эти изслѣдованія, дополнявшія ученіе о сферическихъ треугольникахъ, привели Вьета къ открытію двухъ общихъ формулъ, заключающихъ въ себѣ всѣ случаи сферической тригонометріи. Двѣ другія формулы, въ сущности извѣстныя уже Грекамъ, хотя и не выраженныя ими въ окончательной формѣ, были открыты Арабами, которые много занимались тригонометріей.

3. Говоря о тригонометріи, мы должны еще указать на одну новую и чрезвычайно счастливую мысль Вьета, — мысль, находящуюся въ прямомъ отношеніи къ новѣйшимъ геометрическимъ ученіямъ: это—преобразованіе сферическаго треугольника въ другой, стороны и углы котораго извѣстнымъ образомъ соотвѣтствуютъ сторонамъ и угламъ даннаго треугольника. Вьетъ говоритъ: «если изъ вершинъ сферическаго треугольника, какъ изъ полюсовъ, опишемъ дуги большихъ круговъ, то полученный такимъ образомъ треугольникъ будетъ *взаимный* данному, какъ относительно угловъ, такъ и относительно сторонъ». Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что этотъ *взаимный* треугольникъ не есть совершенно то же, что теперь называется *полярнымъ*, или *дополнительнымъ треугольникомъ*, въ которомъ стороны суть дополненія угловъ первоначальнаго, а углы—дополненія сторонъ: въ треугольникѣ Вьета двѣ стороны прямо равны угламъ первоначальнаго треугольника, третья же сторона есть дополненіе третьяго угла. Поэтому въ треугольникахъ Вьета не имѣетъ мѣста полная взаимность дополнительныхъ треугольниковъ, изъ которой проистекаетъ *двойственность* всѣхъ свойствъ сферическихъ фигуръ; но самая идея этого преобразованія треугольниковъ въ извѣстныхъ случаяхъ тригонометріи

заслуживаетъ вниманія, потомучто она есть первый шагъ къ тому направленію и первый зачатокъ тѣхъ общихъ способовъ дуализаціи, которые употребляются въ настоящее время.

Геометры, писавшіе послѣ Вьета о сферической геометріи, заимствовали у него это удачное нововведеніе и преобразовывали сферическіе треугольники, но всегда въ тѣ же взаимные треугольники Вьета. Таковы: Адріанъ Мецій (Metius), Маджини (Magini), Питискъ (Pitiscus), Неперъ (Neper) и Каваллери (Cavalleri) [4]). Желлибранъ (Gellibrand) также употреблялъ это преобразованіе, но онъ, какъ кажется, не совершенно строго соблюдалъ соотношенія, существующія между соотвѣтственными треугольниками.

Изобрѣтателемъ настоящаго дополнительнаго треугольника, проистекающаго необходимымъ образомъ изъ преобразованія Вьета, былъ Снеллій. Этотъ во многихъ отношеніяхъ замѣчательный геометръ придалъ дополнительному треугольнику значеніе общаго весьма полезнаго начала и показалъ его важность въ сочиненіи *Doctrina triangulorum*, появившемся послѣ его смерти въ 1627 году (Кн. III, теор. 8)

Прибавленіе. Къ числу геометровъ, которые, подражая Вьету, дѣлали преобразованіе сферическихъ треугольниковъ, слѣдуетъ присоединить Альберта Жирара (Albert Girard), употреблявшаго также *взаимный* треугольникъ въ своей тригонометріи, напечатанной въ 1626 году, за годъ до тригонометріи Снеллія. Но этотъ геометръ разумѣлъ подъ этимъ словомъ четыре различные треугольника, составленные изъ дугъ, имѣющихъ полюсами три вершины даннаго треугольника; такъ что треугольники Вьета и Снеллія онъ разсматривалъ также какъ *взаимные*.

Руководство къ тригонометріи Альберта Жирара, приложенное къ таблицѣ синусовъ, тангенсовъ и секансовъ, весьма сжато, но, не смотря на это, содержитъ много интереснаго. Изъ предисловія

[4]) Изъ тригонометріи Вьета было бы трудно хорошенько узнать соотношеніе между его двумя взаимными треугольниками, но они вполнѣ и совершенно ясно приведены Неперомъ въ *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (in 4, 1614) и Каваллери сперва въ *Directorium generale uranometricum* (in 4, 1632) и позднѣе въ *Trigonometria plana et sphaerica* (in 4, 1643).

видно, что авторъ занимался *геометрическимъ анализомъ* древнихъ и возстановилъ сочиненія, заглавія которыхъ переданы намъ Паппомъ; по этому случаю онъ говоритъ, что послѣ этого небольшаго сочиненія о тригонометріи, « которое онъ даетъ какъ образецъ, онъ издастъ что-нибудь болѣе обширное».

Въ этомъ принципѣ Снеллія, если его разсматривать не только какъ средство для рѣшенія вопросовъ сферической тригонометріи, но совершенно отвлеченно, можно видѣть основаніе закона двойственности въ примѣненіи къ геометріи шара. Законъ двойственности сталъ извѣстенъ съ этого времени, но важное значеніе его не было оцѣнено, потомучто онъ нигдѣ не былъ прилагаемъ систематически и со всѣми своими послѣдствіями. Хотя общій законъ двойственности въ пространствѣ, т. е. двоякое проявленіе всѣхъ пространственныхъ формъ, и могъ бы быть выведенъ непосредственно изъ двойственности сферическихъ треугольниковъ, какъ мы это покажемъ при обозрѣніи пятой эпохи, однако онъ былъ открытъ въ первый разъ только въ послѣднее время и притомъ при помощи болѣе глубокихъ, но менѣе прямыхъ, соображеній.

4. **Кеплеръ** (1571—1631). Кеплеръ въ своей «*Новой Стереометріи*» [5]) первый разъ употребилъ въ геометріи *безконечную величину*; это была глубокая мысль, составляющая послѣ способа истощенія, съ такимъ искусствомъ употреблявшагося Архимедомъ, второй шагъ къ способу безконечно-малыхъ. Кеплеръ прилагалъ свой методъ къ изысканію объемовъ тѣлъ, происходящихъ отъ вращенія коническаго сѣченія около прямой, взятой въ его плоскости,—обобщеніе задачъ Архимеда о коноидахъ и сфероидахъ, которое было весьма важно для того времени и представляло большія затрудненія.

Кеплеру же мы обязаны замѣчаніемъ, что приращеніе перемѣнной величины, напримѣръ ординаты кривой линіи, равно нулю въ безконечно-близкомъ сосѣдствѣ съ наибольшимъ или наименьшимъ

---

[5]) *Nova stereometria doliorum etc. Accessit stereometriae Archimediae supplementum*; in fol. Lincii, 1615.

значеніемъ; это замѣчаніе заключало въ себѣ зародышъ аналитическаго правила *de maximis et minimis*, прославившаго Фермата двадцать лѣтъ спустя.

Мы должны упомянуть о прекрасномъ Кеплеровомъ способѣ проэкцій, помощію котораго онъ опредѣлялъ геометрическимъ построеніемъ обстоятельства солнечныхъ затмѣній для различныхъ мѣстъ на земномъ шарѣ. Теперь мы назвали бы это превосходнымъ примѣненіемъ способа проэкцій, несмотря на то, что оно сдѣлано было за 200 лѣтъ до изобрѣтенія Начертательной Геометріи. Этотъ способъ былъ употребляемъ знаменитѣйшими астрономами и геометрами: Кассини, Фламстедомъ, Уреномъ, Галлеемъ и обобщенъ былъ Лагранжемъ въ одномъ его мемуарѣ; любопытно видѣть, съ какимъ искуствомъ знаменитый авторъ *Mécanique analytique* воспользовался также пріемами Начертательной Геометріи за двадцать лѣтъ до того времени, когда появилось въ свѣтъ это произведеніе генія Монжа [6]).

Труды Кеплера открыли обширное поле для новыхъ изысканій, и еслибы этотъ философскій умъ, создавшій современную астрономію, со всею силою генія былъ болѣе обращенъ къ чистой геометріи, то безъ сомнѣнія эта наука была бы обязана ему значительными успѣхами.

5. **Каваллери** (1598—1647). „Черезъ нѣсколько лѣтъ послѣ появленія Кеплерова способа вычисленія объемовъ коноидовъ появилась другая теорія въ такомъ же родѣ и назначавшаяся также для исчисленія геометрическихъ величинъ помощію ихъ элементовъ Эта теорія, обогатившая математическія науки и начинающая собою эпоху величайшихъ открытій, сдѣланныхъ въ новѣйшее время, находилась въ *Géométrie des indivisibles* de Cavalleri, 1635. Способъ Каваллери, удобный главнымъ образомъ для опредѣленія площадей, объемовъ и центровъ тяжести тѣлъ, замѣнявшій собою въ теченіе пятидесяти лѣтъ съ большимъ успѣхомъ интегральное исчисленіе,—былъ, какъ говоритъ самъ Каваллери, ни-

---

[6]) Мемуаръ Лагранжа читанъ въ Берлинской Академіи въ 1778 г. и напечатанъ по нѣмецки въ *Ephémérides de* 1781. По французски онъ появился въ *Connaissance des Temps* 1819.

что иное, какъ счастливое приложеніе или, лучше сказать, видоизмѣненіе способа *истощенія*.

6. **Гюльденъ** (1577—1643). Вмѣстѣ съ открытіями Кеплера и Кавалери мы должны помѣстить знаменитое правило Гюльдена, извѣстное уже, какъ мы говорили, во времена Паппа; но оно оставалось незамѣченнымъ и Гюльденъ открылъ его самъ и употреблялъ для рѣшенія трудныхъ вопросовъ, не поддававшихся другимъ способамъ. Впрочемъ этотъ способъ не могъ служить, какъ способы Кеплера и Каваллери, къ расширенію предѣловъ геометріи.

7. Начало второй трети XVII вѣка, къ которому мы теперь переходимъ, есть эпоха самыхъ важныхъ и блистательныхъ открытій. Почти одновременно являются Декартъ, Ферматъ и Роберваль и открываютъ новые пути для самыхъ глубокихъ соображеній.

Эти три знаменитые ученые раздѣляютъ между собою славу рѣшенія, каждый своимъ особымъ путемъ, той задачи, которую еще ни одинъ геометръ не рѣшался до тѣхъ поръ обнять во всей ея общности: именно общей задачи о *касательныхъ* къ кривымъ линіямъ,—задачи, которую Декартъ желалъ рѣшить, какъ «самую прекрасную и наиболѣе полезную», и которая дѣйствительно была необходимымъ подготовленіемъ къ изобрѣтенію дифференціальнаго исчисленія.

Древніе геометры опредѣляли *касательную* къ кривой линіи какъ прямую, имѣющую съ кривою только одну общую точку и чтобы притомъ между нею и кривою нельзя было провести другой прямой. На основаніи этого опредѣленія они нашли *касательныя* къ нѣкоторымъ извѣстнымъ въ то время кривымъ. Но изъ этого опредѣленія проистекаетъ немного средствъ для рѣшенія задачи, и потому новѣйшіе геометры принуждены были разсматривать *касательныя* съ иныхъ точекъ зрѣнія. Ихъ стали разсматривать, какъ сѣкущія, которыхъ точки пересѣченія сливаются; или какъ продолженія безконечно-малыхъ сторонъ кривой линіи, разсматриваемой, какъ многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ сторонъ; или, какъ направленіе составнаго движенія, при которомъ описывается данная кривая.

Первое воззрѣніе принадлежитъ Декарту и Фермату, хотя ихъ рѣшенія весьма различны между собою; второе было ясно и опредѣленно выражено Барровомъ, который при помощи его упростилъ рѣшеніе Фермата; наконецъ третье принадлежитъ Робервалю[7]).

Рѣшеніе Декарта основывается на началахъ его новой геометріи; о немъ мы будемъ говорить позднѣе при началѣ нашей третьей эпохи.

Теперь же бросимъ взглядъ на труды Роберваля, Фермата и нѣкоторыхъ другихъ, современныхъ имъ, геометровъ, способствовавшихъ вмѣстѣ съ ними къ неизмѣримому развитію въ то время чистой геометріи древнихъ.

8. **Роберваль** (1602—1675). Способъ Роберваля для проведенія касательныхъ основанъ на ученіи о составныхъ движеніяхъ, которое за нѣсколько лѣтъ было уже открыто и введено въ механику Галилеемъ, но не было еще прилагаемо къ геометріи.

Роберваль ясно выражаетъ свой способъ слѣдующими словами: «*Общее правило.* По отличительнымъ признакамъ кривой линіи (которые даны). изслѣдуйте различныя (простыя) движенія, которыя должна имѣть точка, описывающая кривую, въ томъ мѣстѣ, гдѣ вы хотите провести касательную; опредѣлите направленіе движенія, составленнаго изъ всѣхъ этихъ составляющихъ движеній: это направленіе и будетъ касательная къ кривой».

Съ метафизической точки зрѣнія этотъ способъ замѣчательно сходенъ съ способомъ флюксій, установленнымъ гораздо позднѣе Ньютономъ. Но въ рукахъ Роберваля онъ не могъ повести ко всѣмъ послѣдствіямъ, къ которымъ онъ былъ способенъ, и честь открытія которыхъ принадлежитъ Ньютону, потомучто въ то время не было еще необходимаго для этого однообразнаго аналитическаго пріема. Тѣмъ не менѣе мысль Роберваля, во многихъ

[7]) Впослѣдствіи Маклоренъ въ своей теоріи флюксій возвратился къ опредѣленію древнихъ, какъ наиболѣе удовлетворяющему геометрической строгости, которую онъ хотѣлъ сохранить въ этомъ сочиненіи. Лагранжъ также принялъ его въ основаніе въ прекрасной теоріи соприкосновеній въ *Traité des fonctions analytiques.*

отношеніяхъ новая и по истинѣ философская, даетъ этому геометру почетное мѣсто въ исторіи математическихъ открытій.

Дѣйствительно, въ принципѣ Роберваля открывается новый способъ разсматривать величины и находить между ними соотношенія. До этихъ поръ въ геометріи величины предполагались окончательно сложившимися; эти величины, или ихъ части, сравнивались между собою. Роберваль, восходя къ самому происхожденію количествъ, вводитъ въ геометрію причины, которыя по его воззрѣнію ихъ образуютъ, и изъ соотношеній между этими причинами выводитъ заключеніе о соотношеніяхъ между самими количествами. Причина, производящая количества, по его представленію, есть движеніе.

Составленіе движеній было извѣстно уже древнимъ, какъ мы это видимъ въ механическихъ вопросахъ у Аристотеля [8]); притомъ они уже прилагали его къ геометріи при образованіи нѣкоторыхъ кривыхъ. Доказательствомъ служитъ способъ Архимеда описывать спираль чрезъ составленіе круговаго и прямолинейнаго движенія и способъ образованія сферической спирали Паппа. Но геометры эти примѣняли понятіе о движеніе только къ отдѣльныхъ кривымъ; они не имѣли даже мысли основать на этомъ, какъ Роберваль, способъ образованія всѣхъ кривыхъ и, главное, не употребляли этого принципа для открытія свойствъ кривыхъ линій.

То обстоятельство, что способъ Роберваля обладалъ совершенною общностію, заслуживаетъ особаго вниманія, потомучто въ ту эпоху геометрія приводилась еще къ отдѣльному изученію кри-

---

8) *Patet igitur, quotiescumque aliquid per diametrum duplice vi, in diversa. tendente, impellatur, illud necessario ferri secundum rationem laterum.* Quaest-mechan. cap. II

Аристотель возвращается къ этому принципу въ 23 вопросѣ и показываетъ, что количество и направленіе составнаго движенія можетъ быть весьма различно, смотря по тому, составляютъ ли направленія слагающихъ движеній большій или меньшій уголъ.

Знаменитый философъ говоритъ еще довольно опредѣлительно о томъ же принципѣ въ VIII главѣ 12-й книги своей Метафизики.

выхъ, разсматриваемыхъ порознь. Это былъ одинъ изъ первыхъ примѣровъ перехода отъ конкретныхъ идей къ абстрактнымъ въ наукѣ о пространствѣ.

Изъ способа Роберваля было сдѣлано нѣсколько ошибочныхъ примѣненій, вслѣдствіе несоблюденія правилъ составленія движеній, какъ это случалось также нѣсколько разъ и въ вопросахъ механики. Но эти ошибки, происходившія отъ недостатка вниманія, нисколько не касаются самаго метода, главное правило котораго выражено Робервалемъ совершенно строго, (хотя доказательство его изложено и довольно трудно) и тринадцать приложеній къ весьма разнообразнымъ кривымъ [9]), сдѣланныхъ самимъ авторомъ, вполнѣ точны.

Теорія, Роберваля стояла на одной высотѣ съ воззрѣніями Декарта и Фермата и уступала имъ только потому, что они пользовались могущественнымъ пособіемъ анализа, безъ котораго они были бы безплодны. Роберваль умѣлъ оцѣнить это преимущество въ способахъ своихъ знаменитыхъ соперниковъ. Мнѣніе, которое онъ высказалъ по этому поводу въ письмѣ къ Фермату, намъ кажется, можно считать справедливымъ. Говоря о различпыхъ приложеніяхъ своего метода, Роберваль прибавляетъ: «Этотъ методъ изобрѣтенъ не на основаніи той возвышенной и столь глубокой геометріи, какъ вашъ способъ и способъ Декарта, и потому онъ представляется не столь искуснымъ; въ замѣнъ этого онъ кажется мнѣ болѣе простымъ, естественнымъ и болѣе короткимъ; такъ что для всѣхъ касательныхъ, о которыхъ я говорилъ, мнѣ не было даже надобности браться за перо» (*Oeuvres de Fermat*, p. 165).

9. Роберваль былъ соперникомъ Фермата также во всѣхъ вопросахъ о размѣрахъ фигуръ и о ихъ центрахъ тяжести,—въ во-

---

[9]) Парабола, гипербола, эллипсъ, конхоида Никомеда, различныя другія конхоиды, улиткообразная Паскаля, спираль Архимеда, квадратрикса Динострата, циссоида Діоклеса, циклоида, сопутствующая циклоиды (*cycloidis socia*) и парабола Декарта (кривая третьяго порядка, которую Декартъ производилъ непрерывнымъ движеніемъ и употреблялъ въ своей геометріи для построенія уравненій шестой степени).

просамъ, которые близко касались современнаго намъ интегральнаго исчисленія. Для рѣшенія такихъ вопросовъ онъ изобрѣлъ способъ, сходный съ способомъ Каваллери, но обработанный болѣе согласно съ геометрическою строгостію. Этотъ способъ, почерпнутый имъ, по его словамъ, изъ внимательнаго чтенія сочиненій Архимеда, онъ назвалъ *Traité des indivisibles.* Почти достовѣрно, что онъ имъ уже владѣлъ прежде появленія способа Каваллери, но хранилъ его *in petto*, чтобы имѣть передъ своими соперниками лестное преимущество, разрѣшая при помощи его весьма трудныя задачи. Отъ этого вся честь столь полезнаго открытія досталась на долю Каваллери [10]).

10. **Ферматъ** (1590—1663). Способъ Фермата для проведенія касательныхъ основанъ на одинаковыхъ началахъ съ его прекраснымъ методомъ *De maximis et minimis*, въ которомъ имъ первымъ введена безконечность въ вычисленіе, подобно тому какъ Кеплеръ ввелъ ее въ чистую геометрію. По этой причинѣ Ферматъ считается первымъ изобрѣтателемъ исчисленія безконечно малыхъ.

Слѣдующее мѣсто, взятое изъ *Calcul de fonctions* знаменитаго Лагранжа, показываетъ ясно и точно идею и механизмъ способовъ Фермата и связь ихъ съ новѣйшими пріемами исчисленія. «Въ своемъ методѣ *De maximis et minimis* Ферматъ полагаетъ выраженіе количества, для котораго ищется *maximum*, или *minimum*, равнымъ выраженію того же количества, но въ которомъ неизвѣстное увеличено на неопредѣленную величину. Въ этомъ уравненіи онъ уничтожаетъ радикалы и дроби, если они тамъ находятся, и, сокративъ общіе члены въ обѣихъ частяхъ, дѣлитъ всѣ остальные члены на неопредѣленную величину, которая входитъ общимъ множителемъ; послѣ этого онъ полагаетъ неопредѣленную величину равною нулю и получаетъ такимъ образомъ уравненіе для опредѣленія неизвѣстной. Но съ перваго взгляда вид-

[10]) *Traité des indivisibles*, также какъ и большая часть сочиненій Роберваля, появилась только черезъ двадцать лѣтъ послѣ его смерти въ Сборникѣ: *Divers ouvrages de mathématiques et de physique par M. M. de l'Academie royale des sciences*; in fol. 1693, и потомъ въ VI томѣ прежнихъ *Mémoires de l'Académie des sciences*.

но, что тотъ же результатъ получается по правилу дифференціальнаго исчисленія, которое заключается въ томъ, что дифференціалъ выраженія, для котораго ищется maximum, или minimum, относительно перемѣннаго, приравнивается нулю; основаніе въ обоихъ случаяхъ одно и тоже: члены, исчезающіе какъ безконечно малые въ дифференціальномъ исчисленіи, приравниваются нулю въ способѣ Фермата. Его способъ касательныхъ проистекаетъ изъ того же начала. Въ уравненіи между абсциссой и ординатой, которое онъ называетъ отличительнымъ свойствомъ кривой, онъ увеличиваетъ, или уменьшаетъ, абсциссу на неопредѣленное количество и разсматриваетъ новую ординату какъ общую для кривой и для касательной; отсюда получается уравненіе, которое онъ изслѣдуетъ такъ же, какъ въ случаѣ *maximum* и *minimum*. Здѣсь опять видно сходство способа Фермата съ дифференціальнымъ исчисленіемъ: неопредѣленное количество, придаваемое къ абсциссѣ, соотвѣтствуетъ ея дифференціалу, а получающееся при этомъ приращеніе ординаты—дифференціалу ординаты. Весьма замѣчательно, что въ сочиненіи, заключающемъ въ себѣ открытіе дифференціальнаго исчисленія и напечатанномъ въ Лейпцигскихъ Актахъ за октябрь 1684 г. подъ заглавіемъ: *Nova methodus pro maximis et minimis* etc., Лейбницъ называетъ дифференціаломъ ординаты линію, относящуюся къ произвольному приращенію абсциссы, какъ ордината относится къ субтангенсу; это сближаетъ его анализъ съ способомъ Фермата» [11].

---

[11] Пуассонъ высказался не столь рѣшительно, какъ Лагранжъ, по поводу этого важнаго вопроса. Безпристрастіе, съ которымъ мы обязаны относиться къ этому обстоятельству въ исторіи науки, гдѣ рѣчь идетъ о томъ, чтобы приписать Фермату открытіе, распространившее столько славы на Англію и Германію, заставляетъ насъ привести слова Пуассона, которыя притомъ знакомятъ самымъ яснымъ образомъ съ идеей способа Фермата и точно указываютъ оттѣнокъ, отличающій этотъ способъ отъ изобрѣтенія Лейбница. Фермату принадлежитъ философская идея, Лейбницу необходимое орудіе, чтобы ею пользоваться.

«Съ приближеніемъ къ *maximum* или *minimum* количество измѣняется все «менѣе и менѣе и дифференціалъ его исчезаетъ, когда оно достигаетъ одной «изъ этихъ крайнихъ величинъ. Исходя изъ этого начала, Ферматъ напалъ

Мнѣніе Лагранжа о долѣ, принадлежащей Фермату въ изобрѣтеніи новыхъ исчисленій, было также мнѣніемъ его знаменитыхъ современниковъ Лапласа и Фурье. Еще въ то время, когда никто не думалъ отстаивать въ пользу Фермата принадлежащую ему по справедливости славу, оно было высказано Даламбертомъ [12]), который съ такою глубиною и проницательностію писалъ о метафизикѣ геометріи, и даже еще Бюффономъ, переводчикомъ *Теоріи флюксій* и восторженнымъ почитателемъ великаго Ньютона [13]).

11. Ферматъ, вмѣстѣ съ Паскалемъ, былъ изобрѣтателемъ исчисленія вѣроятностей, одного изъ лучшихъ произведеній XVII вѣка.

«на счастливую мысль давать безконечно малое приращеніе перемѣнному, отъ «котораго зависитъ изслѣдуемая величина, и для нахожденія *maximum* или «*minimum* приравнять нулю соотвѣтственное приращеніе этой величины, приведенное предварительно къ одинаковому порядку съ приращеніемъ перемѣннаго. Этимъ способомъ онъ опредѣлилъ, по какому пути долженъ идти лучъ «свѣта при переходѣ изъ одной среды въ другую, предполагая, согласно съ «принятой имъ теоріей, что время перехода должно быть наименьшее. Лагранжъ по этой причинѣ признаетъ его первымъ изобрѣтателемъ дифференціальнаго исчисленія; но это исчисленіе состоитъ изъ цѣлой совокупности «правилъ, непосредственно ведущихъ къ дифференціаламъ всѣхъ возможныхъ «функцій, а не только въ употребленіи безконечно-малыхъ измѣненій для рѣшенія той или другой задачи; въ этомъ отношеніи изобрѣтеніе дифференціальнаго исчисленія не восходитъ далѣе Лейбница, изобрѣтателя того символическаго обозначенія, которое съ самаго начала было принято почти всюду и способствовало главнымъ образомъ успѣхамъ анализа безконечно-малыхъ» (*Mémoire sur le calcul des variations*, par Poisson, lu á l'Académie le 10 novembre 1831, inséré dans le t. XII des *Mémoires de l'Académie des sciences*).

12) «Декарту мы обязаны приложеніемъ алгебры къ геометріи, на которомъ «основывалось дифференціальное исчисленіе; Фермату же первымъ приложеніемъ анализа къ дифференціальнымъ количествамъ для нахожденія касательныхъ; новѣйшая геометрія есть ничто иное какъ этотъ послѣдній способъ «въ болѣе общемъ видѣ» (*Encyclopédie*, Art. *Géometrie*).

13) «Ферматъ нашелъ средство для исчисленія безконечныхъ и далъ превосходный способъ для нахожденія наибольшихъ и наименьшихъ; помимо «обозначенія этотъ способъ одинаковъ съ тѣмъ, который употребляется въ в«ше время; наконецъ способъ этотъ былъ бы дифференціальнымъ исчисленіемъ «еслибы авторъ обобщилъ его». (Предисловіе къ переводу *Méthode des fluxions de Newton*).

Ему не было равнаго въ теоріи чиселъ: онъ владѣлъ безъ сомнѣнія какимъ-нибудь простымъ способомъ, который намъ еще неизвѣстенъ, несмотря на значительные успѣхи неопредѣленнаго анализа; потомучто прекрасныя теоремы его, оставленныя намъ безъ доказательствъ, занимали собою потомъ самыхъ лучшихъ геометровъ и были доказаны только мало по малу, съ большимъ трудомъ и посредствомъ различныхъ пріемовъ.

Хотя Ферматъ съ особою любовію занимался преимущественно числовыми изысканіями, однако и геометрія обязана ему также прекрасными открытіями.

По образцу Архимеда, который нашелъ квадратуру параболы, Ферматъ опредѣлилъ площади параболъ всѣхъ порядковъ; сверхъ того онъ нашелъ объемы и центры тяжести параболоидовъ и другихъ тѣлъ; открылъ также свойства спирали, отличающейся отъ спирали Архимеда. Онъ пошелъ даже дальше главы геометровъ древности, разрѣшивъ посредствомъ чисто геометрическаго способа, сходнаго съ способомъ истощенія, задачу, которой у Архимеда нѣтъ и слѣда и которую Декартъ считалъ выше силъ человѣческаго ума, именно задачу о полномъ распрямленіи кубической параболы и нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ (*De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione. Oeuvres de Fermat*, *p.* 89), но такъ какъ его сочиненіе появилось только въ 1660 году, то въ этомъ важномъ открытіи распрямленія кривыхъ линій Ферматъ былъ предупрежденъ Нейлемъ и Фанъ-Геретомъ.

Возможность для рѣшенія большинства изъ этихъ важныхъ вопросовъ доставлена была Ферматy его способомъ *De maximis et minimis*. Однимъ изъ лучшихъ приложеній этого способа было приложеніе къ явленіямъ преломленія свѣта, возбудившее знаменитый споръ между нимъ и Декартомъ. Рѣшеніе Ферматa оказалось подтвержденіемъ правила, найденнаго его славнымъ соперникомъ, правила, которое онъ до тѣхъ поръ оспаривалъ. Это рѣшеніе такъ изящно, что Ферматy слѣдуетъ приписать вмѣстѣ съ Декартомъ честь расширенія предѣловъ геометріи примѣненіемъ ея къ изученію явленій природы.

12. Ферматъ занимался также другимъ отдѣломъ геометріи, от-

носящимся къ геометрическому анализу древнихъ и названнымъ нами геометріею Аполлонія.

Онъ возстановилъ по указаніямъ, оставленнымъ Паппомъ, *плоскія мѣста* Аполлонія. Въ письмѣ къ Робервалю Ферматъ заявилъ, что имъ найдено еще много другихъ прекрасныхъ и достойныхъ вниманія предложеній; но напечатаны были и сдѣлались извѣстны намъ только двѣ книги Аполлонія.

Онъ показалъ средство находить плоскія и тѣлесныя мѣста помощію общаго аналитическаго пріема и научилъ пользоваться этимъ пріемомъ для построенія задачъ посредствомъ геометрическихъ мѣстъ. Этотъ пріемъ состоялъ въ употребленіи координатъ Декарта, которыя были придуманы Ферматомъ прежде, нежели знаменитый философъ издалъ свою геометрію.

Впослѣдствіи Ферматъ распространилъ этотъ пріемъ и примѣнилъ его къ рѣшенію труднаго вопроса объ общемъ построеніи геометрическихъ задачъ помощію простѣйшихъ кривыхъ. При этихъ изысканіяхъ о степени кривыхъ, необходимыхъ для построенія какого-нибудь уравненія, онъ пришелъ къ общему выводу, доказательство котораго далъ впослѣдствіи въ Лейпцигскихъ Актахъ 1688 года Яковъ Бернулли, упрекавшій геометрію Декарта за опущеніе этого общаго вывода, состоящаго въ томъ, что всегда достаточно, чтобы произведеніе порядковъ употребляемыхъ кривыхъ линій было не меньше степени уравненія [14]).

13. Въ своемъ сочиненіи *De contactibus sphaericis* Ферматъ первый разрѣшилъ вполнѣ задачи о прикосновеніи шаровъ, подобно тому, какъ это сдѣлалъ Вьетъ для прикосновенія круговъ въ *Apollonius Gallus*.

Вопросъ этотъ былъ предложенъ ему Декартомъ, который въ своихъ письмахъ говоритъ, что разрѣшилъ его посредствомъ прямой линіи и круга; но рѣшеніе это до насъ не дошло.

Сочиненіе Фермата отличается полнотою и написано въ хорошемъ чисто-геометрическомъ стилѣ. Но надобно замѣтить, что въ

---

[14]) *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas, etc* Opera varia p. 110.

послѣднее время изложеніе этого предмета стало гораздо лучше [15]), и вотъ именно въ какихъ отношеніяхъ. Въ сочиненіи Фермата кромѣ главной задачи о шарѣ касающемся четырехъ другихъ, заключается еще четырнадцать другихъ задачъ, которыя въ сущности представляютъ частные случаи главной; но ихъ необходимо разрѣшить предварительно, одну за другой, чтобы этимъ послѣдо-

[15]) До начала нынѣшняго столѣтія не было другихъ сочиненій о прикосновеніи шаровъ, кромѣ сочиненія Фермата. Но въ эту эпоху вопросъ этотъ привлекъ вниманіе нѣкоторыхъ учениковъ Монжа; они взглянули на предметъ съ новой точки зрѣнія, которую уже можно было предугадать въ общности пріемовъ и соображеній, составляющихъ характеръ геометріи знаменитаго учителя. Первыя попытки эти были помѣщены во второмъ нумерѣ I-го тома *Correspondence polytechnique*; краткій разборъ мемуара Дюпена, который долженъ былъ служить ихъ пополненіемъ, явился позднѣе въ томъ же изданіи (t. II p. 420); изящные и новые результаты, находящіеся въ немъ, заставляютъ сожалѣть о томъ, что знаменитый академикъ не публиковалъ своей работы. Готье (Gaultier), профессоръ въ Conservatoire des arts et métiers, взялся снова за этотъ вопросъ и изслѣдовалъ его съ совершенно новою и окончательно удовлетворительною общностью. Новѣйшіе методы довели этотъ предметъ еще до большей простоты. Одни изъ этихъ изслѣдованій имѣютъ чисто начертательный характеръ, т. е. въ нихъ не разсматривается никакихъ соотношеній между величинами линій; они суть самыя общія и самыя простыя. Между другими, вводящими понятіе о мѣрѣ и требующими составленія нѣкоторыхъ соотношеній между линіями, должно отличить изслѣдованія знаменитаго Ферголы и ученика его Флаути, напечатанныя въ *Mémoires de l'Académie des sciences de Naples* (См. также *Geometria del' sito* соч. Flauti изд. второе 1821 г. стр. 156).

Вопросъ о шарѣ, касающемся четырехъ другихъ, есть одинъ изъ тѣхъ, въ которыхъ геометрія долгое время имѣла преимущество передъ анализомъ. Эйлеръ представилъ Петербургской Академіи въ 1779 году два аналитическія рѣшенія, которыя помѣщены были только въ началѣ нынѣшняго столѣтія въ Recueil этой Академіи за 1807 и 1808 годъ (напечатаны въ 1810 г). Карно уже указалъ на аналитическое рѣшеніе въ своей *Géométrie de position* (стр. 416), но онъ не выполнилъ всѣхъ исчисленій, которыя должны были привести его къ уравненію второй степени. Въ наше время Пуассонъ первый разрѣшилъ вполнѣ этотъ вопросъ путемъ вычисленія (*Bulletin de la société philomatique* 1812 г. стр. 141). Вскорѣ послѣ этого Бине и Франсе предложили еще два другія аналитическія рѣшенія. (См. *Journal de l'école polytechnique* тетр. 17 и *Annales de mathématiques* томъ III).

вательнымъ путемъ дойти наконецъ до рѣшенія конечной задачи, которое хотя изящно и очень просто, но не включаетъ въ себѣ всѣхъ частныхъ случаевъ вопроса, а напротивъ само приводится къ одному изъ такихъ случаевъ. Современная геометрія поступаетъ не такъ: она сразу даетъ рѣшеніе общей задачи и въ этомъ рѣшеніи заключаются всѣ частные случаи, черезъ которые Ферматъ долженъ былъ перейти. Легко понять, какъ много выгодъ въ такой общности понятій и пріемовъ и нельзя не видѣть въ этомъ истиннаго успѣха для науки. Позволимъ себѣ прибавить, что этому вопросу можно придать еще иного рода обобщеніе, именно разсматривать вмѣсто четырехъ шаровъ четыре поверхности втораго порядка, подобныя между собою, или даже вообще четыре какія нибудь поверхности втораго порядка, лишь бы онѣ были вписаны всѣ въ одну поверхность того же порядка. Въ этомъ видѣ задача включаетъ въ себѣ, какъ частный случай, задачу о четырехъ шарахъ (См. Примѣчаніе XXVIII).

Это сравненіе рѣшенія Фермата съ новѣйшими не будетъ, можетъ-быть, сочтено здѣсь неумѣстнымъ, такъ какъ оно указываетъ на характеръ успѣховъ, сдѣланныхъ геометріею, и на то направленіе, по которому она должна стремиться даже въ такихъ вопросахъ, гдѣ мы слишкомъ часто ограничиваемся удивленіемъ къ трудамъ великихъ геометровъ, какъ бы не смѣя даже предполагать, чтобы усовершенствованія въ наукѣ могли ихъ коснуться.

14. Ферматъ обѣщалъ и началъ возстановленіе поризмъ Евклида; этому слову онъ придавалъ иной смыслъ, нежели какой принятъ былъ впослѣдствіи всѣми на основаніи истолкованія Р. Симсона. Но если знаменитый шотландскій геометръ разгадалъ и возстановилъ форму изложенія поризмъ, то Ферматъ не менѣе его проникъ можетъ-быть въ эту тайну угадавъ цѣль, назначеніе и ту пользу, которую Евклидъ признавалъ за своимъ сочиненіемъ *о поризмахъ*. Но Ферматъ выражается объ этомъ предметѣ такъ кратко, что, можетъ-быть, нужно было *á priori* опредѣлить идеи и цѣли, которыя мы усматриваемъ, какъ намъ кажется, въ его воззрѣніи на поризмы; поэтому мы оставляемъ до другаго времени болѣе подробное сужденіе объ этомъ.

Пять предложеній, оставленныхъ Ферматомъ какъ примѣры, или какъ *specimen* поризмъ, заставляютъ жалѣть, что онъ не продолжалъ этого труда. Особенно третья изъ этихъ поризмъ должна заслуживать полнаго вниманія геометровъ, такъ какъ это одна изъ прекраснѣйшихъ и наиболѣе полезныхъ теоремъ въ теоріи коническихъ сѣченій. Она есть ничто иное какъ знаменитая теорема Дезарга о инволюціи шести точекъ,—теорема столь хорошо извѣстная въ новой геометріи. Другая поризма, которую Ферматъ предложилъ для доказательства Валлису, есть частный случай общей теоремы въ примѣненіи къ параболѣ [16]).

Ферматъ обѣщалъ не только возстановленіе трехъ книгъ поризмъ Евклида: онъ имѣлъ въ виду распространить это ученіе далѣе предѣловъ, установленныхъ греческимъ геометромъ, и приложить его къ коническимъ сѣченіямъ и кривымъ другаго рода. Онъ говоритъ, что открылъ вещи неизвѣстныя и замѣчательныя [17]).

Мы далеки отъ того, чтобы считать, какъ Р. Симсонъ, такое обѣщаніе слишкомъ смѣлымъ; мы видимъ въ этомъ только при-

---

16) Р. Симсонъ заимствовалъ у Фермата эти два прекрасныя предложенія и доказалъ ихъ: первое въ своемъ трактатѣ о поризмахъ подъ n^0 81, а потомъ то и другое въ Трактатѣ о коническихъ сѣченіяхъ, Кн. 5-я теоремы 12 и 19. Второе, относящееся къ параболѣ, было также воспроизведено въ *Dictionnaire de mathématiques* par Ozanam, въ статьѣ о поризмахъ.

17) *Jmò et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in coni sectionibus et aliis quibuscumque curvis mirabilia sanè, et hactenus ignota detegemus* (Varia opera Mathematica, p. 119).

Это обѣщаніе, которое мы, принимая въ соображеніе вѣрность сужденія и благородный характеръ автора, не имѣемъ повода считать преувеличеннымъ, показываетъ намъ, какъ важно было бы для геометріи отысканіе рукописей Фермата, о утратѣ которыхъ сожалѣли до сихъ поръ преимущественно по отношенію къ анализу.

Можно надѣяться, что мы не навсегда лишены этихъ драгоцѣнныхъ сочиненій. Либри, посвятившій себя изысканіямъ по общей исторіи наукъ, уже отыскалъ два, до сихъ поръ неизданные, отрывка и нашелъ нѣсколько указаній, подающихъ надежду къ новымъ открытіямъ. Высокій умъ этого знаменитаго изслѣдователя служитъ ручательствомъ, что онъ при своихъ изысканіяхъ будетъ высоко цѣнить отрывки по чистой геометріи, также какъ и произведенія генія Фермата, относящіяся къ анализу.

знакъ того, что Ферматъ разгадалъ истинный смыслъ ученія Евклида и умѣлъ понять всю важность и пользу его.

Прибавленіе. Ферматъ писалъ также о *мѣстахъ на поверхности.*

Мерсеннъ говоритъ объ этомъ слѣдующимъ образомъ: *Omitto locos ad superficiem, cujus isagogem vir idem Cl.* (Fermatius) *amicis communem fecit, et alia quae utinam ab eo tantum impetremus* (См. *Universae Geometriae mixtaeque mathematicae synopsis;* in—4, 1644, p. 388).

Паскаль. (1623—1662). Въ то же самое время Паскаль, обративъ вниманіе, съ свойственною его уму проницательностію, на способъ недѣлимыхъ Каваллери, доказалъ его съ полною строгостію и въ самомъ общемъ видѣ приложилъ къ труднѣйшимъ вопросамъ о поверхностяхъ, объемахъ и центрахъ тяжести тѣлъ. Эти изысканія, представляющія драгоцѣнный памятникъ силы человѣческаго ума, касались близко интегральнаго исчисленія; они составляютъ связь между Архимедомъ и Ньютономъ.

При помощи этого способа Паскаль превзошелъ всѣхъ знаменитѣйшихъ геометровъ въ изысканіяхъ свойствъ циклоиды.

Эта знаменитая кривая, исторія которой тѣсно связана со всѣми великими открытіями XVII вѣка, была уже предметомъ изученія Галилея, Декарта, Фермата, Роберваля, Торичелли. Оставленная на нѣкоторое время, она была снова выведена на сцену Паскалемъ, который какъ бы желалъ, чтобы многочисленные трудные вопросы, къ которымъ даетъ поводъ эта кривая, служили испытаніемъ и мѣрою силъ и способностей геометровъ того времени. Уренъ, Слюзъ, Валлисъ, Гюйгенсъ, Ла-Люберъ, Фабри отозвались на этотъ вызовъ и каждый изъ нихъ разрѣшилъ большую или меньшую часть предложенныхъ вопросовъ, оставляя Паскалю славу полнаго рѣшенія. Послѣ этого циклоида вступила въ третью фазу, во время изобрѣтенія дифференціальнаго исчисленія. Сверхъ прекрасныхъ и разнообразныхъ геометрическихъ свойствъ, она обнаружила тогда въ рукахъ Ньютона, Лейбница, Бернулли и маркиза Лопиталя еще новыя свойства, почерпнутыя изъ механиче-

скихъ соображеній и увеличившія еще болѣе важность и знаменитость этой удивительной кривой линіи.

Движеніе колеса по плоскости, служившее поводомъ къ открытію циклоиды, представляетъ другое образованіе этой кривой, на которое, мнѣ кажется, не было обращено вниманія, именно: *обвертка пространства, пробѣгаемаго діаметромъ колеса, есть также циклоида* [18]).

Изученіе этой кривой повело къ цѣлому многочисленному классу линій, производимыхъ движеніемъ данной кривой по другой неподвижной кривой; эти линіи были разсматриваемы во всей общности Лейбницемъ, Де-Лагиромъ, Николемъ и др. Германъ и Клеро распространили туже теорію на кривыя линіи, описываемыя подобнымъ же образомъ на сферѣ.

16. Труды Паскаля по другому отдѣлу геометріи, относящемуся къ геометрическому анализу древнихъ и къ теоріи коническихъ сѣченій, заслуживаютъ вниманія не менѣе его замѣчательныхъ изслѣдованій циклоиды и не менѣе другихъ приложеній способа Каваллери. Въ этихъ изслѣдованіяхъ, также какъ и въ сочиненіи Дезарга объ этомъ предметѣ, мы находимъ зародышъ новѣйшихъ ученій, составляющихъ новую геометрію. Поэтому мы должны говорить съ нѣкоторою подробностію объ этой части открытій Паскаля.

Самое выдающееся изъ нихъ есть открытіе прекрасной теоремы о мистическомъ шестиугольникѣ (*hexagramme mystique*), которая была удивительнымъ орудіемъ въ рукахъ Паскаля. Подъ этимъ названіемъ разумѣется то свойство всякаго вписаннаго въ коническое сѣченіе шестиугольника, что *три точки встрѣчи противоположныхъ сторонъ всегда находятся на одной прямой*. Коническое сѣченіе опредѣляется пятью точками; поэтому теорема заключаетъ въ себѣ соотношеніе между положеніемъ всякой шестой точки кривой и пятью данными точками, и слѣдовательно эта

---

[18]) Эпициклоиды также способны къ такому двоякому происхожденію и отсюда выводятся различныя свойства этихъ кривыхъ.

Если вмѣсто діаметра будемъ разсматривать въ движущемся кругѣ какую нибудь хорду, то огибающею будетъ развертывающая эпициклоиды.

теорема выражаетъ собою основное и характеристическое свойство коническихъ сѣченій. Вотъ почему Паскаль, которому тогда, какъ самъ онъ говоритъ [19]), было не болѣе шестнадцати лѣтъ, принялъ ее за основаніе своего полнаго трактата о коническихъ сѣченіяхъ. Это сочиненіе не дошло до насъ; Лейбницъ, который во время своего пребыванія въ Парижѣ имѣлъ его въ своихъ рукахъ, передаетъ намъ въ письмѣ, написанномъ въ 1676 году къ Перье (Perier), племяннику Паскаля, заглавія шести частей, или отдѣловъ, изъ которыхъ составлено было это сочиненіе.

Заглавіе 1-й части показываетъ, что Паскаль пользовался началами перспективы для образованія коническихъ сѣченій помощію круга и такимъ образомъ выводилъ свойства ихъ изъ свойствъ круга. Этотъ пріемъ, по словамъ Лейбница, лежалъ въ основаніи всего сочиненія.

Во 2-й части говорилось о мистическомъ шестиугольникѣ. «Показавъ оптическое образованіе коническихъ сѣченій, говоритъ «Лейбницъ, посредствомъ проложенія круга на плоскость, пересѣ«кающую конусъ лучей, онъ объясняетъ замѣчательныя свойства «нѣкоторой фигуры, составленной изъ шести прямыхъ линій и «называемой имъ мистическимъ шестиугольникомъ».

Въ 3-й части находились приложенія этого шестиугольника: свойства хордъ и діаметровъ, раздѣленныхъ гармонически, и, по всей вѣроятности, теоремы, составляющія теорію полюсовъ [20]).

---

[19]) Conicorum opus completum, *et conica Apollonii et alia innumera unicâ ferè propositione amplectens*; *quod quidem nondum sex decimum aetatis annuum assecutus excogitavi, et deindè in ordinem congessi.* (*Oeuvres de Pascal*, t. IV, p. 410).

[20]) Понселе въ *Traité des propriétés projectives*, p. 101, уже высказалъ это мнѣніе, которое, какъ намъ кажется, нетрудно подтвердить. Въ самомъ дѣлѣ если предположимъ, что двѣ противоположныя стороны шестиугольника безконечно малы, то чертежъ представитъ намъ вписанный въ коническое сѣченіе четыреугольникъ и двѣ касательныя въ противоположныхъ его вершинахъ, и тогда теорема приводитъ непосредственно къ слѣдующей, какъ къ простому слѣдствію: Когда въ коническое сѣченіе вписанъ четыреугольникъ, то касательныя, проведенныя въ противоположныхъ вершинахъ, пересѣкаются на прямой, соединяющей точки встрѣчи противоположныхъ сторонъ.

4-я часть заключала въ себѣ предложенія объ отрѣзкахъ на сѣкущихъ, проведенныхъ параллельно двумъ неподвижнымъ прямымъ, и свойства фокусовъ.

Въ 5-й части разрѣшались задачи о построеніи коническаго сѣченія, удовлетворяющаго даннымъ условіямъ, т. е. проходящаго черезъ данныя точки и касающагося данныхъ прямыхъ.

Наконецъ 6-я часть озаглавлена Лейбницемъ словами: *De loco solido.* По нѣкоторымъ словамъ можно догадываться, что здѣсь шла рѣчь о знаменитой задачѣ Паппа: *ad tres aut quatuor lineas.*

Въ нѣкоторыхъ открывкахъ заключались сверхъ того различныя задачи.

17. Къ счастію, Паскаль, по случаю этого большаго трактата, собралъ подъ заглавіемъ *Essai pour les coniques* нѣкоторыя важнѣйшія теоремы, которыя должны были въ немъ заключаться, желая подвергнуть ихъ сужденію геометровъ и узнать ихъ мнѣніе, прежде нежели продолжать свой трудъ. Объ этомъ *Essai*, появившемся въ 1640 году, когда Паскалю былъ едва шестнадцать лѣтъ, говорится въ нѣкоторыхъ письмахъ Декарта, которому Мерсеннъ послалъ это сочиненіе. Съ тѣхъ поръ оно болѣе вѣка оставалось въ забвеніи, изъ котораго было вызвано только въ 1779 году, благодаря Боссю (Bossut), который помѣстилъ его въ полномъ изданіи *Oeuvres de Pascal.*

Это сочиненіе, въ семь страницъ in 8-o, есть драгоцѣнный остатокъ открытій и метода великаго Паскаля въ области коническихъ сѣченій.

Вотъ весьма краткій разборъ его.

Вначалѣ изложена, въ видѣ *леммы*, изъ которой должно проистекать все остальное, знаменитая теорема о шестиугольникѣ.

Кажется, что эта теорема соотвѣтствуетъ словамъ *de quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus*, которыя составляютъ заглавіе 3-й части, и что это была одна изъ теоремъ, выведенныхъ Паскалемъ изъ своего шестиугольника. Но легко видѣть, что въ этой теоремѣ заключается вся теорія полюсовъ. На основаніи этого мы считаемъ доказаннымъ, что теорія полюсовъ заключалась въ числѣ приложеній, сдѣланныхъ Паскалемъ изъ его шестиугольника.

Первое изъ слѣдующихъ затѣмъ предложеній относится также къ шестиугольнику, вписанному въ коническое сѣченіе: это—соотношеніе между отрѣзками, образуемыми на двухъ сторонахъ двумя другими сторонами и двумя діагоналями. Въ сущности это соотношеніе есть ничто иное, какъ теорема Дезарга о инволюціи шести точекъ; но оно представлено съ иной точки зрѣнія и поэтому способно къ иного рода приложеніямъ. Мы разовьемъ подробнѣе эту мысль въ Примѣчаніи XV.

Слѣдующее предложеніе, выраженное въ видѣ двойнаго равенства отношеній, заключаетъ въ себѣ различныя теоремы. Первая изъ нихъ есть 129-я теорема 7-й книги «Математическаго Собранія» Паппа; она подала намъ поводъ къ введенію понятія объ *ангармоническомъ отношеніи* и мы говорили уже, что она можетъ служить основаніемъ для значительной части новой геометріи. Вторая теорема есть Птоломеева о треугольникѣ, пересѣченномъ трансверсалью.

Затѣмъ слѣдуетъ предложеніе, которое, если принять во вниманіе Птоломееву теорему, приводитъ къ прекрасному и весьма важному свойству коническихъ сѣченій относительно отрѣзковъ, образуемыхъ этими кривыми на сторонахъ треугольника,—теорема, доказанная въ послѣднее время знаменитымъ авторомъ *Géométrie de position*.

Слѣдующее послѣ этого предложеніе есть тоже свойство коническихъ сѣченій, распространенное, вмѣсто треугольника, на какой-нибудь четыреугольникъ [21]). Эта теорема, обобщенная Карно, который доказалъ ее для многоугольника и для какой угодно геометрической кривой и распространилъ даже на кривыя поверх-

---

[21]) Если предположимъ, что двѣ вершины четыреугольника удалены въ безконечность, то отрѣзки, кончающіеся въ этихъ вершинахъ, будутъ равны, такъ какъ они безконечны и считаются отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ; отсюда проистекаетъ прекрасное свойство коническихъ сѣченій, состоящее въ томъ, что произведенія отрѣзковъ на двухъ трансверсаляхъ, проводимыхъ изъ одной точки параллельно двумъ неподвижнымъ прямымъ, находятся въ постоянномъ отношеніи.

ности [22]), есть одна изъ самыхъ богатыхъ слѣдствіями теоремъ въ ученіи о трансверсаляхъ.

Послѣ этого мы встрѣчаемъ знаменитую теорему о инволюціи шести точекъ, «первымъ изобрѣтателемъ которой былъ Дезаргъ, «одинъ изъ величайшихъ умовъ своего времени, обладавшій глу-«бокими знаніями въ математикѣ и, между прочимъ, въ теоріи «коническихъ сѣченій». Паскаль прибавляетъ, что «старался по-«дражать его методу въ этомъ предметѣ, который онъ изложилъ «безъ помощи осеваго треугольника и изслѣдовалъ въ общемъ ви-«дѣ всѣ роды коническихъ сѣченій» [23]).

18. Извѣстно богатство слѣдствій, проистекающихъ изъ вышеприведенныхъ теоремъ, и потому очень понятно, что Паскаль положилъ ихъ, какъ самъ онъ объявилъ это, въ основаніе полнаго трактата о коническихъ сѣченіяхъ; сами эти теоремы выведены изъ мистическаго шестиугольника; такимъ образомъ Паскаль изъ одного основнаго предложенія получилъ до 400 слѣдствій, какъ это говоритъ Мерсеннъ въ сочиненіи *De mensuris*, *ponderibus etc*, in fol. 1644 [24]). (См. Прим. XIII).

Нетрудно замѣтить, что каждая изъ этихъ главныхъ теоремъ выражаетъ извѣстное свойство шести точекъ коническаго сѣченія, и это объясняетъ намъ, какимъ образомъ Паскаль могъ ихъ получить изъ своего мистическаго шестиугольника, который заключаетъ въ себѣ общее свойство такихъ шести точекъ. Но каждая изъ теоремъ получила свою особую форму, удобную для извѣстна-

---

[22]) *Géométrie de position*, p. 437.

[23]) Говоря объ Аполлоніи, мы объяснили, что слѣдуетъ понимать подъ именемъ о с е в а г о т р е у г о л ь н и к а; мы сказали что этотъ великій геометръ древности при образованіи коническихъ сѣченій предполагалъ сѣкущую плоскость перпендикулярною къ плоскости этого треугольника. Дезаргъ, какъ мы видимъ, и по его примѣру Паскаль, изслѣдовали коническія сѣченія гораздо болѣе общимъ способомъ, давая сѣкущей плоскости совершенно произвольное положеніе.

[24]) *Unica propositione universalissima,* 400 *corollariis armata, integrum Apollonium complexus est.*

го рода примѣненій, которыя такимъ образомъ вели къ безчисленному множеству свойствъ коническихъ сѣченій.

Это въ высшей степени полезное умѣнье выводить изъ одного принципа большое число истинъ,—умѣнье, которому мы не встрѣчаемъ примѣровъ въ сочиненіяхъ древнихъ, составляетъ главное преимущество нашихъ новѣйшихъ методовъ.

19. Паскаль написалъ нѣсколько другихъ сочиненій по геометріи въ томъ же стилѣ, какъ его *Traité des coniques*. Намъ извѣстны только ихъ заглавія, благодаря замѣткѣ, переданной Паскалемъ въ 1654 году [25]) обществу ученыхъ, собиравшихся попеременно другъ у друга прежде основанія Академіи Наукъ, которое было въ 1666 году.

Здѣсь мы узнаемъ, что Паскаль, по примѣру Вьета, но съ значительнымъ обобщеніемъ и посредствомъ чрезвычайно простаго способа, разрѣшилъ задачи о прикосновеніи круговъ, затѣмъ соотвѣтственныя задачи о прикосновеніи шаровъ; что онъ написалъ трактатъ о *плоскихъ мѣстахъ*, гораздо болѣе обширный и значительный, чѣмъ все сдѣланное по этому предмету древними и новыми геометрами, и притомъ посредствомъ новаго и чрезвычайно удобнаго пріема; наконецъ, что онъ изобрѣлъ новый способъ перспективы, доведенный до возможной простоты, потомучто всякая точка изображенія строилась помощію пересѣченія двухъ прямыхъ линій.

Этихъ слабыхъ указаній, находящихся въ замѣткѣ Паскаля, достаточно, чтобы сожалѣть объ утратѣ сочиненій, въ которыхъ долженъ былъ блистать изобрѣтательный геній этого глубокаго геометра и то замѣчательное искуство, съ какимъ онъ умѣлъ всегда обобщить первое открытіе и извлечь всѣ заключенныя въ немъ истины.

20. **Дезаргъ** (1593—1662). Дезаргъ, котораго Паскаль избралъ руководителемъ и который дѣйствительно былъ достоинъ такого ученика также писалъ годомъ ранѣе, о коническихъ сѣченіяхъ совершенно новымъ и оригинальнымъ образомъ. Его способъ, также какъ способъ Паскаля, основывался на началахъ перспективы [26])

---

[25]) *Oeuvres de Pascal*, t. IV, p. 408.

[26]) Это еще вопросъ, знали ли древніе примѣненіе перспективы къ раціо-

и на нѣкоторыхъ предложеніяхъ теоріи трансверсалей. Намъ осталось только нѣсколько не вполнѣ ясныхъ указаній объ одномъ его сочиненіи подъ заглавіемъ: *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan*. Другія сочиненія, если только они существовали, какъ это можно предполагать на основаніи одного мѣста въ *Essai* Паскаля, состояли можетъ быть только изъ летучихъ листковъ, въ которыхъ Дезаргъ, какъ кажется, имѣлъ обыкновеніе сообщать о своихъ открытіяхъ, или отвѣчать своимъ многочисленнымъ клеветникамъ.

Сочиненіе, о которомъ мы сказали выше, появилось въ 1639 году. О немъ говорится во многихъ письмахъ Декарта.

Это сочиненіе отличалось нѣсколькими новыми предложеніями, и, главное, духомъ метода, основаніемъ которому служило вѣрное и плодотворное разсужденіе, что коническія сѣченія, будучи получаемы отъ различныхъ способовъ пересѣченія конуса, имѣющаго основаніемъ кругъ, должны имѣть съ кругомъ многія общія свойства.

Дезаргъ внесъ такимъ образомъ два важныхъ нововведенія въ изученіе коническихъ сѣченій. Во первыхъ, онъ разсматривалъ ихъ на конусѣ при всевозможныхъ положеніяхъ сѣкущей плоскости,

---

нальной геометріи; и вопросъ этотъ, кажется еще недостаточно изслѣдованъ. Съ перваго взгляда мы склонны отвѣчать на него утвердительно: такъ пріемъ этотъ кажется естественнымъ и близко связаннымъ съ способомъ полученія коническихъ сѣченій на кругломъ конусѣ. Таково поэтому и обыкновенное мнѣніе геометровъ. Оно подкрѣплено было въ послѣднее время своеобразнымъ мнѣніемъ Понселе о поризмахъ Евклида, которыя будто бы были предложеніями, доказываемыми по этому способу (*Traité des propriétés projectives*, Introduction, p. XXXII). Но, несмотря на все уваженіе, которое мы питаемъ къ мнѣніямъ знаменитаго геометра, мы должны сознаться, что при чтеніи древнихъ мы не нашли даже слѣда чего-нибудь, что позволило бы намъ раздѣлять его мнѣніе въ данномъ случаѣ. Мы думаемъ, напротивъ, что способъ перспективы, какъ мы его теперь употребляемъ въ раціональной геометріи, совсѣмъ не употреблялся въ греческой школѣ. Поэтому, до болѣе полнаго и основательнаго изслѣдованія, мы будемъ приписывать этотъ способъ новымъ геометрамъ и скажемъ, что Дезаргу и Паскалю, первымъ, принадлежитъ заслуга примѣненія его къ теоріи коническихъ сѣченій.

не пользуясь, какъ Аполлоній, осевымъ треугольникомъ. Во вторыхъ, онъ задумалъ примѣнить къ этимъ кривымъ свойства круга, служащаго основаніемъ конусу.

Эта мысль, какъ она ни кажется теперь проста и естественна намъ, привыкшимъ къ способу перспективы и къ другимъ пріемамъ преобразованія фигуръ, не приходила на умъ геометрамъ Александріи. Мы не находимъ никакого слѣда ея въ ихъ сочиненіяхъ; пользуясь въ своей теоріи коническихъ сѣченій свойствомъ круга (именно свойствомъ произведенія отрѣзковъ пересѣкающихся хордъ), они вовсе не имѣютъ намѣренія найти соотвѣтственное свойство для этихъ кривыхъ, а имѣютъ въ виду доказать только свою теорему о *latus rectum*.

21. Способъ Дезарга далъ ему возможность внести въ теорію коническихъ сѣченій, какъ это сдѣлано имъ и въ другихъ сочиненіяхъ, большую общность и новыя воззрѣнія, послужившія къ расширенію соображеній и метафизики въ геометріи.

Онъ разсматривалъ различныя сѣченія конуса (кругъ, эллипсъ, параболу, гиперболу, систему двухъ прямыхъ), какъ видоизмѣненія одной и той же кривой: до этихъ же поръ они разсматривались отдѣльно и изслѣдовались каждое особыми способами [27]).

Декартъ передаетъ намъ, что Дезаргъ разсматривалъ также систему параллельныхъ линій, какъ видоизмѣненіе системы прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ; точка встрѣчи въ этомъ случаѣ находится въ безконечности. «Что касается вашего способа разсматривать параллельныя линіи, какъ будто бы онѣ сходились на безконечномъ разстояніи, чтобы включить ихъ въ одинъ классъ съ «тѣми, которыя идутъ въ одну и туже точку,—то онъ очень хо«рошъ...» [28]) (*Lettres de Descartes*, t. III, p. 457; изданіе in—12).

---

27) *Desarguesius primus sectiones conicas universali quadam ratione tractare, ac propositiones multas sic enuntiare coepit, ut quaecunque sectio subintelligi posset.* (*Acta erud.* ann. 1685, p. 400).

28) Это нововведеніе обратило на себя въ то время вниманіе. Боссъ приводитъ его, какъ примѣръ общности воззрѣній Дезарга въ геометріи, въ слѣ-

Лейбницъ указываетъ также на эту мысль Дезарга въ мемуарѣ объ опредѣленіи кривой, огибающей безконечное число линій (*Acta erud.* an. 1692, p. 168); въ другомъ мѣстѣ онъ приводитъ эту мысль въ связь съ своимъ закономъ непрерывности (*Comm. epist.* t. II, p. 101). Ньютонъ принялъ такое же опредѣленіе параллельныхъ линій въ 18 и 22 леммахъ *Principia*, гдѣ онъ разсматриваетъ параллельныя прямыя, какъ сходящіяся въ безконечно-удаленной точкѣ.

Дезаргъ примѣнялъ къ системѣ прямыхъ свойства кривыхъ линій; теперь это вещь естественная и часто употребляемая, потомучто система прямыхъ, также какъ геометрическая кривая, можетъ быть выражена однимъ уравненіемъ; но тогда это было соображеніе новое и оригинальное. Декартъ слѣдующимъ образомъ говоритъ объ этомъ въ письмѣ къ Мерсенну:

«Способъ, которымъ онъ начинаетъ свое разсужденіе, примѣ«няя его въ одно время къ прямымъ и кривымъ линіямъ, тѣмъ «болѣе хорошъ, что онъ есть самый общій и кажется почерпну«тымъ изъ того, что я привыкъ называть метафизикой геометріи; «это наука, которою, сколько мнѣ извѣстно, никто еще не поль«зовался, развѣ только Архимедъ. Я самъ всегда прибѣгаю къ «ней, чтобы въ общемъ видѣ судить о предметахъ, которые воз«можно найти, и о томъ, гдѣ я ихъ долженъ искать....» (*Lettres*, t. IV, p. 379).

22. Идеи Дезарга о сравненіи системы прямыхъ съ кривыми линіями должны были повести его къ изысканію въ коническихъ сѣченіяхъ различныхъ извѣстныхъ свойствъ пары прямыхъ. Намъ сохранилось только одно изъ нихъ, которое Паскаль въ *Essai pour les coniques* называетъ чудеснымъ и которое дѣйствительно необыкновенно богато выводами. Это есть соотношеніе между отрѣзками, образуемыми на произвольной сѣкущей, коническимъ

дующихъ словахъ: «Онъ показываетъ, въ письмѣ къ своему покойному другу, Паскалю сыну, что параллельныя линіи во всемъ подобны линіямъ, сходящимся въ одной точкѣ, и ничѣмъ отъ нихъ не отличаются.» (*Traité des pratiques géométrales et perspectives*; in—12, 1665).

сѣченіемъ и четырьмя сторонами вписаннаго въ него четыреугольника.

Соотношеніе это состоитъ въ томъ, что «произведеніе отрѣзковъ «трансверсали, заключающихся между точкою коническаго сѣче«нія и двумя противоположными сторонами четыреугольника, от«носится къ произведенію отрѣзковъ между тою же точкою кривой «и двумя другими противоположными сторонами четыреугольника, «также, какъ относятся между собою подобныя же произведенія, «составленныя для второй точки пересѣченія коническаго сѣченія «съ трансверсалью.»

Эта теорема изложена Паскалемъ въ *Essai pour les coniques* и Богрannомъ (Beaugrand) въ критическомъ письмѣ о сочиненіи Дезарга: *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan*. Изъ этого письма мы узнаемъ, что Дезаргъ называлъ соотношеніе, составляющее его прекрасную теорему, *инволюціею шести точекъ*.

Изъ теоремы видно, какъ шесть точекъ другъ другу соотвѣтствуютъ, т. е. *сопряжены* попарно. Дезаргъ разсматривалъ случай, когда двѣ сопряженныя точки сливаются; тогда получается инволюція пяти точекъ [29]); потомъ случай, когда двѣ другія сопряженныя точки также сливаются; тогда остается только четыре точки и инволюціонное соотношеніе обращается въ *гармоническую пропорцію*.

Въ приведенномъ нами изложеніи инволюціоннаго соотношенія шести точекъ содержится восемь отрѣзковъ; но его можно замѣнить другимъ, заключающимъ въ себѣ только шесть отрѣзковъ, и тогда это будетъ точно такое же отношеніе, какое было дано Паппомъ для отрѣзковъ, образуемыхъ на трансверсали четырьмя сторонами и двумя діагоналями четыреугольника (130-я теорема VII книги *Математическаго Собранія*).

---

[29]) Есть другой случай инволюціи пяти точекъ: когда шестая точка удаляется въ безконечность; тогда сопряженная ей точка принимаетъ весьма замѣчательное положеніе. Я не знаю, изслѣдованъ ли особо этотъ случай, представляющійся часто, когда и рѣчи нѣтъ о теоріи инволюціи,

Разсматривая пару діагоналей, какъ кривую линію втораго порядка, проходящую черезъ четыре вершины четыреугольника, мы замѣтимъ, что теорема Дезарга есть обобщеніе теоремы Паппа, въ которой двѣ діагонали четыреугольника замѣняются какимъ угодно коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ черезъ четыре вершины.

23. Превосходное сочиненіе Бріаншона *Mémoire sur les lignes du deuxième ordre* (Paris, 1817) основано на этой теоремѣ и обнаруживаетъ все богатство ея. Но, кажется, Дезаргъ самъ извлекъ уже изъ нея значительную долю пользы, при выводѣ многихъ свойствъ коническихъ сѣченій; дѣйствительно, Богранъ въ своемъ письмѣ [30]) говоритъ, что часть сочиненія *Brouillon projet etc.* состояла въ изслѣдованіи слѣдствій изъ этой теоремы. Сверхъ того мы находимъ въ сочиненіи гравера Босса *Pratiques géométrales et perspectives* слѣдующее мѣсто, относящееся, по всей вѣроятности, къ той же теоремѣ. Боссъ отвѣчаетъ противникамъ Дезарга и прибавляетъ: «Между прочимъ то, что онъ напечаталъ о коническихъ сѣченіяхъ, гдѣ въ одной теоремѣ заключаются, какъ случаи, шестьдесятъ предложеній первыхъ четырехъ книгъ Аполлонія, заслужило ему уваженіе ученыхъ, которые считаютъ его однимъ изъ лучшихъ геометровъ нашего времени, и между ними— чудо нашего вѣка—Паскаль».

Мы встрѣчаемъ еще въ сочиненіи гравера Grégoire Huret подъ заглавіемъ *Optique de portraiture et peinture* etc. Paris 1670, in fol. нѣсколько замѣчаній объ этой же теоремѣ, доказывающихъ, что Дезаргъ умѣлъ сдѣлать изъ нея обширное употребленіе.

Такимъ образомъ достовѣрно, что теорема Дезарга служила основаніемъ его теоріи коническихъ сѣченій и что многочисленныя свойства этихъ кривыхъ, которыя мы научились выводить изъ этой теоремы только нѣсколько лѣтъ тому назадъ, не ускользнули отъ логическаго и склоннаго къ обобщеніямъ ума Дезарга.

Но, кромѣ необыкновенной плодотворности, теорема эта представляетъ еще другой характеръ, на который не менѣе важно обращать вниманіе при философскомъ разборѣ развитія и напра-

---

[30]) См. Прим. XIV.

вленія методовъ теоріи коническихъ сѣченій. Эта теорема, по самой сущности своей, дала возможность Дезаргу разсматривать совершенно произвольныя сѣченія круглаго конуса, не прибѣгая къ употребленію осеваго треугольника, какъ говоритъ объ этомъ Паскаль; тогда какъ древніе и всѣ писатели послѣ нихъ пересѣкали конусъ только плоскостями перпендикулярными къ осевому треугольнику. Намъ кажется, что это великое нововведеніе есть самая важная заслуга сочиненія Дезарга о коническихъ сѣченіяхъ.

24. Изъ предыдущаго видно, что сочиненіе Дезарга было дѣйствительно прекрасно и оригинально и что оно внесло въ геометрію коническихъ сѣченій новую общность и новую простоту. Оно было оцѣнено по достоинтству великими людьми того вѣка. Мы привели уже выраженіе удивленія къ этому сочиненію со стороны Паскаля; тоже мнѣніе раздѣлялъ и Ферматъ, который въ письмѣ къ Мерсенну выражается такъ: «Я весьма уважаю Дезарга, тѣмъ «болѣе, что онъ былъ самъ изобрѣтателемъ своихъ коническихъ «сѣченій. Книжечка его, которая, какъ вы говорите, считается «болтовнею, показалась мнѣ весьма понятною и очень умною.» (*Oeuvres de Fermat*, p. 173).

Нетрудно видѣть, въ чемъ заключается главная причина обилія слѣдствій, извлекаемыхъ изъ теоремы Дезарга, и той совершенно новой простоты, которая внесена ею въ теорію коническихъ сѣченій. Это потому, что въ ней заключается совершенно общее соотношеніе между шестью произвольными точками кривой. Древнимъ было извѣстно подобное соотношеніе только въ случаѣ нѣкоторыхъ особыхъ положеній шести точекъ; такъ напримѣръ, въ случаѣ, когда четыре точки находятся попарно на двухъ параллельныхъ между собою хордахъ (соотношеніе это состоитъ въ томъ, что произведенія отрѣзковъ, образуемыхъ на параллельныхъ хордахъ линіею, соединяющею двѣ остальныя точки, относятся между собою, какъ произведенія отрѣзковъ этой линіи, образуемыхъ параллельными хордами). Поэтому имъ были необходимы всегда промежуточныя предложенія, чтобы перейти отъ прямаго или неявнаго разсмотрѣнія пяти точекъ къ разсмотрѣнію шестой точки. Отсюда—весьма большое число вспомогательныхъ теоремъ, казав-

шихся необходимыми въ теоріи конических сѣченій; отсюда же главнымъ образомъ—длиннота доказательствъ.

Правда, рѣшеніе задачи *ad quatuor lineas* приводило къ совершенно общему свойству шести точекъ коническаго сѣченія; но до Аполлонія эта задача не была разрѣшена вполнѣ и этотъ великій геометръ, который говоритъ, что рѣшилъ ее при помощи началъ, находящихся въ его III книгѣ, не имѣлъ можетъ быть времени достаточно вникнуть въ ея сущность; онъ не нашелъ даже нужнымъ помѣстить ее въ своемъ сочиненіи о коническихъ сѣченіяхъ, такъ что у древнихъ она не имѣла никакого примѣненія.

25. Мы говорили уже, что Ферматъ въ числѣ нѣсколькихъ предложеній, служившихъ примѣрами поризмъ, далъ также теорему Дезарга; нельзя сомнѣваться, чтобы этотъ великій геометръ не открылъ ее самъ. Но Дезаргу, кромѣ старшинства въ открытіи болѣе чѣмъ на 25 лѣтъ, принадлежитъ то преимущество, что онъ разгадалъ и употребилъ въ дѣло всю пользу, доставляемую этой теоремой при изученіи коническихъ сѣченій.

Намъ кажется, что, до послѣдняго времени, Р. Симсонъ былъ единственный геометръ, пользовавшійся этою теоремой; онъ доказалъ ее въ 5-й книгѣ *Traité de Coniques* (пред. 12) и понималъ ея плодотворность, потомучто, выведя изъ нея шесть слѣдствій, онъ прибавляетъ, что въ нихъ заключается простое и естественное доказательство нѣкоторыхъ предложеній первой книги *Principia* Ньютона. Р. Симсонъ заимствовалъ эту теорему изъ сочиненій Фермата, какъ это сказано въ его *Traité des Porismes*, гдѣ онъ ее также доказываетъ въ n⁰ 81.

26. До настоящаго времени теорему Дезарга разсматривали только въ вышеизложенной формѣ и извлекли изъ нея множество приложеній. Но, вводя понятіе объ *ангармоническомъ отношеніи*, можно смотрѣть на нее съ другой точки зрѣнія и дать ей другой видъ, въ которомъ она явится новымъ предложеніемъ, способнымъ къ другимъ приложеніямъ. Это предложеніе можно считать *центральнымъ* во всей теоріи коническихъ сѣченій, потомучто изъ него, какъ изъ единственнаго центра, проистекаетъ естественнымъ образомъ безчисленное множество разнообразныхъ свойствъ этихъ

кривыхъ, свойствъ, которыя безъ этого кажутся несвязанными и чуждыми другъ другу. При помощи этого предложенія легко перейти отъ теоремы Дезарга къ теоремѣ Паскаля и *vice versâ*, и отъ каждой изъ этихъ теоремъ къ различнымъ другимъ общимъ свойствамъ коническихъ сѣченій, напр. къ прекрасной теоремѣ Ньютона объ органическомъ образованіи этихъ кривыхъ. (См. Прим. XV).

27. Древніе для образованія коническихъ сѣченій разсматривали только конусъ съ круглымъ основаніемъ; Дезаргъ и Паскаль подражали имъ въ этомъ, такъ какъ они получали эти кривыя посредствомъ перспективнаго проложенія круга. Вслѣдствіе этого возникалъ вопросъ, всѣ ли конусы, имѣющіе основаніемъ какое-нибудь коническое сѣченіе, тождественны съ круглыми конусами; или, другими словами, можетъ-ли всякій конусъ съ эллиптическимъ, параболическимъ, или гиперболическимъ основаніемъ, быть пересѣченъ по кругу; и, если это такъ, то какъ опредѣлить положеніе сѣкущей плоскости? Дезаргъ, по свидѣтельству Мерсенна [31]), предложилъ этотъ вопросъ, имѣвшій въ свое время нѣкоторую знаменитость по причинѣ трудности; дѣйствительно, задача эта допускаетъ три рѣшенія и потому зависитъ въ анализѣ отъ уравненія третьей степени, а въ геометріи отъ коническихъ сѣченій. Декартъ рѣшилъ ее при помощи своей новой аналитической геометріи и посредствомъ весьма изящнаго пріема, но только для того случая, когда основаніе конуса есть парабола; при этомъ рѣшеніе приводится къ пересѣченію круга съ параболой [32]). Послѣ этого тотъ же вопросъ занималъ собою многихъ другихъ знаменитыхъ геометровъ: маркиза Лопиталя [33]), Германа [34]), Жакье [35]), которые слѣдовали также аналитическому пути Де-

---

31) *Universae geometriae, mixtaeque mathematicae synopsis*; in fol. 1644, p. 331.

32) *Lettres de Descartes*; éd. in—12, 1725; t. VI, p. 328.

33) *Traité analytique des sections coniques*; livre 10, p. 407.

34) *Commentarii Academiae Petropolitanae*; t. VI, ann. 1732 et 1733.

35) *Elementi di perspettiva*; in—8; Romae 1755, p. 140.

карта и внесли въ него нѣкоторыя упрощенія. Мнѣ неизвѣстно, было ли кѣмъ нибудь предложено чисто геометрическое и графическое рѣшеніе этого вопроса. Вся трудность исчезаетъ передъ новѣйшими геометрическими пріемами, при помощи которыхъ можно получить нѣсколько различныхъ рѣшеній 36).

Прибавленіе. Мы сказали, что предложенный Дезаргомъ вопросъ о пересѣченіи по кругу конуса съ эллиптическимъ, гиперболическимъ, или параболическимъ основаніемъ былъ рѣшенъ Декартомъ на основаніи началъ аналитической геометріи. Мы должны были прибавить, что Дезаргъ также рѣшилъ эту задачу посредствомъ

---

36) Достаточно опредѣлить три главныя оси конуса, потомучто, зная ихъ, непосредственно получаемъ положеніе круговыхъ сѣченій.

Для опредѣленія главныхъ осей провожу черезъ большую ось коническаго сѣченія C, служащаго основаніемъ конусу, плоскость перпендикулярную къ плоскости основанія и въ этой плоскости воображаю себѣ другое коническое сѣченіе, имѣющее вершинами и фокусами вершины и фокусы перваго.

Это второе коническое сѣченіе я разсматриваю, какъ основаніе другаго конуса, имѣющаго съ даннымъ одну и туже вершину. Новый конусъ встрѣтитъ плоскость кривой C по другому коническому сѣченію; оно пересѣчется съ C въ четырехъ точкахъ; въ четыреугольникѣ, составленномъ этими точками, двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ и точка пересѣченія діагоналей будутъ три точки, принадлежащія тремъ искомымъ осямъ.

Задача такимъ образомъ рѣшена.

Второе рѣшеніе. Черезъ вершину даннаго конуса проводимъ прямыя, перпендикулярныя къ касательнымъ плоскостямъ; эти прямыя образуютъ другой конусъ втораго порядка, который встрѣчается съ плоскостью коническаго сѣченія, служащаго основаніемъ первому конусу, по другому коническому сѣченію. Эти двѣ кривыя пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, служащихъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ, къ рѣшенію задачи.

Мы должны прибавить, что въ плоскости двухъ коническихъ сѣченій вообще существуютъ три точки, изъ которыхъ каждая имѣетъ одну и туже поляру относительно обѣихъ кривыхъ; эти то три точки и принадлежатъ тремъ искомымъ главнымъ осямъ.

Мы нашли еще нѣсколько другихъ рѣшеній; но всѣ они требуютъ построенія коническаго сѣченія; это такъ и должно быть, потомучто задача допускаетъ три рѣшенія.

графическаго построенія *). Это видно изъ предисловія къ *Synopsis universae Geometriae* Мерсенна. Дезаргъ приводилъ рѣшеніе задачи къ изысканію главной оси конуса, т. е. оси, имѣющей свойство, что всякая перпендикулярная къ ней плоскость пересѣкаетъ конусъ по эллипсу, центръ котораго находится на этой оси. Онъ строилъ эту ось при помощи двухъ линій, для которыхъ опредѣлялъ сколько угодно точекъ. Мерсеннъ не говоритъ, какія это были линіи: но по всей вѣроятности, онѣ были — коническія сѣченія.

Опредѣливъ круговыя сѣченія конуса, Дезаргъ употреблялъ ихъ для рѣшенія различныхъ другихъ задачъ; напримѣръ о пересѣченіи конуса по коническому сѣченію, подобному съ даннымъ; или по такому, которое удовлетворяло бы условію, что наибольшій уголъ между сопряженными діаметрами имѣетъ данную величину.

Дезаргъ рѣшилъ и эту задачу и притомъ, по словамъ Мерсенна, въ самомъ, какъ только возможно, общемъ видѣ: именно:

Даны: конусъ съ эллиптическимъ, параболическимъ, или гиперболическимъ основаніемъ и сѣкущая плоскость; опредѣлить, не строя кривой пересѣченія конуса съ плоскостію, ея сопряженные діаметры, наклоненные подъ даннымъ угломъ, ея касательныя, ординаты, параметры и другія главныя въ ней линіи.

Дезаргъ упоминаетъ самъ о подобной же задачѣ въ концѣ своей маленькой книги о перспективѣ, находящейся въ трактатѣ о перспективѣ, изданномъ Боссомъ (in—8, 1648, p. 334); онъ выражается такимъ образомъ:

---

*) Архимедъ рѣшилъ эту задачу въ случаѣ, когда вершина конуса находится въ плоскости, проходящей черезъ одинъ изъ главныхъ діаметровъ коническаго сѣченія и перпендикулярной къ плоскости основанія; это видно изъ 8-го и 9-го предложеній книги о сфероидахъ и коноидахъ.

Изъ этихъ же предложеній видно, что Архимедъ, еще прежде Аполлонія, разсматривалъ косой конусъ съ круглымъ основаніемъ; тѣмъ не менѣе, впрочемъ, Аполлоній первый сталъ изучать теорію коническихъ сѣченій на косомъ конусѣ.

Ayant à pourtraire une coupe de cône plate, y mener deux lignes dont les apparences soient tes essieux de la figure qui la représente.

Это значитъ: коническое сѣченіе проложено посредствомъ перспективы; найти въ его плоскости двѣ прямыя, которыя въ перспективѣ будутъ главными осями того коническаго сѣченія, которое получается въ проложеніи.

Изъ предисловія къ *Synopsis* Мерсенна мы узнаемъ еще, что Дезаргъ составилъ полный трактатъ о тѣлесномъ углѣ, гдѣ онъ рѣшилъ слѣдующія четыре задачи:

1. *Даны три плоскіе угла: опредѣлить три угла двугранныхъ.*

2. *Даны два плоскіе угла и одинъ двугранный: найти остальной плоскій и два двугранные угла*

3. *Данъ одинъ плоскій и два двугранные угла: найти два другіе плоскіе и третій двугранный уголъ.*

4. Наконецъ *по даннымъ тремъ двуграннымъ найти три плоскіе угла.*

Мерсеннъ прибавляетъ, что Дезаргъ составлялъ другой трегранный уголъ, въ которомъ плоскіе углы были *дополненіями* двуграннымъ угламъ даннаго *и наоборотъ.* Отъ этого четыре задачи приводились къ двумъ.

Легко замѣтить, что этотъ *дополнительный* трегранный уголъ соотвѣтсвуетъ *дополнительному* треугольнику сферической тригонометріи, изобрѣтенному за нѣсколько лѣтъ до этого Снелліемъ въ его сочиненіи о тригонометріи. Что касается до самымъ задачъ, то онѣ представляютъ графическое рѣшеніе задачъ сферической тригонометріи. Впослѣдствіи это называлось рѣшеніемъ треугольной пирамиды. Теперь эти задачи составляютъ главу Начертательной Геометріи и часто употребляются въ приложеніяхъ этой науки, особенно къ обдѣлкѣ камней. (См. *Traite de Géométrie descriptive*, de M. Hachette и 3-ю тетрадь 1-го тома *Correspondance polytechnique*).

28. Мы обязаны также Дезаргу слѣдующимъ свойствомъ треугольника, которое въ новой геометріи сдѣлалось однимъ изъ основныхъ и наиболѣе полезныхъ предложеній: «Если два треугольника, «въ пространствѣ или въ одной плоскости, имѣютъ попарно вер-

«шины на трехъ прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ; то сто-«роны ихъ пересѣкаются попарно въ трехъ точкахъ, лежащихъ «на одной прямой.»

Эта теорема, вмѣстѣ съ двумя другими, изъ которыхъ одна есть ея обратная, помѣщена въ концѣ сочиненія *Traité de perspective*, составленнаго Боссомъ [37]) согласно началамъ и методу Дезарга и появившагося въ 1636 году. Когда треугольники находятся въ двухъ разныхъ плоскостяхъ, то теорема эта, какъ замѣчаетъ Дезаргъ, есть очевидная истина; но когда они въ одной плоскости, то доказательство замѣчательно тѣмъ, что оно основывается на Птоломеевой теоремѣ о треугольникѣ, пересѣченномъ трансверсалью. Это одинъ изъ первыхъ примѣровъ употребленія у новыхъ геометровъ этой знаменитой теоремы, сдѣлавшейся потомъ основаніемъ теоріи трансверсалей.

Въ послѣднее время эта теорема Дезарга была воспроизведена въ первый разъ Сервуа (Servois) въ сочиненіи *Solutions peu connues* etc. и потомъ употреблялась Бріаншономъ (*Correspondance polytechnique*, t. III, p. 3), Понселе въ его *Traité des propriétés projectives*, Штурмомъ и Жергономъ (*Annales de mathématiques*; t. XVI et XVII). Понселе основалъ на ней свою изящную теорію гомологическихъ фигуръ. Онъ называетъ два треугольника, о которыхъ мы говоримъ, *гомологическими*, точку пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ попарно ихъ вершины, *центромъ гомологіи*, и прямую, на которой попарно пересѣкаются ихъ стороны, — *осью гомологіи*.

Прибавленіе. Понселе далъ слѣдующую теорему для геометріи въ пространствѣ, какъ соотвѣтствующую Дезарговой теоремѣ на плоскости: *Если два тетраэдра имѣютъ вершины, лежащія попарно на четырехъ прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ, то плоскости противоположныхъ граней пересѣкаются по четыремъ прямымъ, находящимся въ одной плоскости* (*Trai-*

---

37) *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral*; in—8; 1648, p. 340.

té des propriétés projectives, art. 582). Эта теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ:

Когда вершины двухъ тетраэдровъ помѣщены попарно на четырехъ прямыхъ, принадлежащихъ къ одной группѣ образующихъ гиперболоида съ одною полостью, то грани ихъ пересѣкаются по четыремъ прямымъ, которыя принадлежатъ къ образующимъ другаго гиперболоида.

29. До сихъ поръ пользовались только геометрическими свойствами двухъ такихъ треугольникивъ, метрическія же отношенія ихъ, т. е. отношенія величинъ и размѣровъ, которыя важны не менѣе начертательныхъ свойствъ, еще не были разсматриваемы въ общемъ видѣ. Извѣстны только нѣкоторые частные случаи. Такъ, если треугольники подобны и подобно расположены, то ихъ ось гомологіи находится въ безконечности; въ этомъ случаѣ разстоянія двухъ какихъ нибудь соотвѣтственныхъ точекъ отъ центра подобія находятся въ постоянномъ отношеніи. Точно также, если центръ гомологіи двухъ треугольниковъ находится въ безконечности, то извѣстно, что разстоянія соотвѣтственныхъ точекъ отъ оси гомологіи имѣютъ постоянное отношеніе. Понятно, что эти два соотношенія представляютъ только частные случаи одного общаго соотношенія, принадлежащаго двумъ какимъ угодно гомологическимъ треугольникамъ, у которыхъ ни *центръ*, ни *ось* гомологіи не находятся въ безконечности. Мы доказываемъ это общее соотношеніе въ нашемъ мемуарѣ, но оно такъ просто, что мы приведемъ его здѣсь, какъ дополненіе къ теоремѣ Дезарга: «отношеніе разстояній двухъ соотвѣтственныхъ вершинъ въ гомологическихъ треугольникахъ отъ центра гомологіи и отношеніе разстояній тѣхъ же вершинъ отъ оси гомологіи находятся между собою въ постоянномъ отношеніи». Эта теорема чрезвычайно полезна, доставляя множество новыхъ свойствъ гомологическихъ фигуръ и въ особенности системы двухъ коническихъ сѣченій, для которой изучены въ общемъ видѣ только чисто-геометрическія свойства [38]).

---

[38]) **Извѣстныя до сихъ поръ мертическія свойства двухъ какихъ угодно ко-**

Прибавимъ еще, что эта теорема Дезарга самымъ естественнымъ образомъ приводитъ къ слѣдующему прекрасному принципу перспективы, составляющему, можно сказать, главное назначеніе этой теоремы. «Если изъ двухъ плоскихъ фугуръ, помѣщенныхъ въ «пространствѣ, одна есть перспектива другой и если будемъ вра-«щать плоскость первой фигуры около линіи пересѣченія ея съ «плоскостью второй фигуры, то прямыя, соединяющія соотвѣт-«ственныя точки обѣихъ фигуръ, всегда будутъ сходиться въ од-«ной точкѣ [39]); это же будетъ и въ томъ случаѣ, когда плоско-«сти фигуръ совмѣстятся.» Изъ этого предложенія легко объясняются многія приложенія перспективы.

30. Дезаргъ занимался приложеніями геометріи къ искуствамъ; какъ человѣкъ, одаренный высшими способностями, онъ внесъ въ эти занятія, вмѣстѣ съ точностію, часто незнакомою художникамъ, духъ обобщенія, замѣченный нами въ его изысканіяхъ по чистой геометріи.

Были изданы различныя сочиненія его о перспективѣ, обдѣлкѣ камней и объ устройствѣ солнечныхъ часовъ Эти сочиненія были, кажется, весьма кратки; они представляли нѣчто въ родѣ извлеченій, заключавшихъ въ себѣ какъ бы только самое существенное содержаніе другихъ болѣе обширныхъ и полныхъ сочиненій. Спустя нѣсколько лѣтъ, извѣстный граверъ Боссъ былъ ознакомленъ Дезаргомъ съ этими новыми соображеніями, и, хотя онъ былъ посредственный геометръ, однако имѣлъ довольно проницательности, чтобы оцѣнить геній Дезарга; онъ снова изложилъ эти изслѣдованія, но черезъ-чуръ растянуто, думая, что для художниковъ болѣе удобно такое изложеніе, вовсе несвойственное истинному геометру. Но, вслѣдствіе утраты оригинальныхъ сочиненій Дезарга, статьи Босса пріобрѣли нѣкоторое значеніе. Для геометра, кото-

---

ническихъ сѣченій приводятся, сколько мнѣ извѣстно, только къ нѣкоторымъ гармоническимъ соотношеніямъ.

[39]) Эта точка встрѣчи будетъ измѣнять свое положеніе въ пространствѣ и легко видѣть, что она описываетъ кругъ въ плоскости перпендикулярной къ общему пересѣченію плоскостей обѣихъ фигуръ.

рый захотѣлъ бы прочесть ихъ со вниманіемъ, они достаточны, чтобы возстановить теоретическія начала, служившія основаніемъ различныхъ практическихъ приложеній, изложенныхъ въ оригинальныхъ трудахъ Дезарга.

Вотъ заглавія сочиненій Дезарга.

1. *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis, proportions, mesures, éloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage*, par G. D. L. (Girard Desargues, lyonnais), à Paris, 1636. Привилегія дана была въ 1630 году.

2. *Brouillon projet de la coupe des pierres.* 1640 г.

3. *Les cadrans, ou moyen de placer le style, ou l'axe*, напечатанное въ концѣ *Brouillon de la coupe des pierres.* [40])

Въ трактатѣ о перспективѣ, составленномъ Боссомъ, находится отрывокъ изъ оригинальнаго сочиненія Дезарга. Въ этомъ отрывкѣ мы узнаемъ сущность и основаніе всего сочиненія Босса. Цѣль Дезарга состояла въ воспроизведеніи перспективы, не прибѣгая къ рисунку предмета, а только при помощи линій, указывающихъ положеніе каждой точки предмета въ пространствѣ; подобно тому, какъ такія же линіи служатъ въ строительномъ искуствѣ къ построенію основной плоскости и контуровъ предмета. По этому поводу онъ изобрѣлъ *l'echelle fuyante*, которая и теперь употребляется у художниковъ и въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ о перспективѣ носитъ имя Дезарга (см. о перспеткивѣ соч. Ozanam, p. 62. éd. 1720, in—8).

Это сочиненіе, по свидѣтельству Фермата, было «пріятно и умно». Декартъ высказалъ о немъ подобное же мнѣніе, говоря въ пись-

---

[40]) Заглавіе перваго изъ этихъ трехъ сочиненій мы нашли въ *Perspective de Nicéron* (in fol. 1652) и въ сочиненіи о перспективѣ Ламберта (2-я часть, Zurich 1773; in 8-o); заглавія остальныхъ двухъ, теперь, кажется, совершенно неизвѣстныхъ, потомучто мы нигдѣ не нашли на нихъ никакого указанія,—въ весьма рѣдкомъ сочиненіи Кюрабелля (J. Curabelle): *Examen des Oeuvres du sieur Desargues*; Paris 1644, in-4. (81 страница).

мѣ къ Мерсенну: «Я получилъ только нѣсколько дней тому назадъ «двѣ небольшія книги *in folio*, которыя вы мнѣ послали; одну изъ «нихъ, въ которой говорится о перспективѣ (*сочиненіе Дезарга*), «нельзя не одобрить и не оцѣнить въ ней причудливаго и чистаго «языка». (*Lettres*, t. IV, p. 257).

Книга о квадрантахъ заслужила также одобреніе Декарта, который находилъ, что «изобрѣтеніе превосходно и тѣмъ болѣе остро«умно, что оно въ высшей степени просто». (*Lettres*, t. IV, p. 147). Великій философъ не выразилъ своего мнѣнія о книгѣ «de la coupe des pierres», потомучто въ ней недоставало фигуръ [41]).

Кажется, что Дезаргу принадлежитъ также изобрѣтеніе эпициклоидъ и ихъ употребленіе въ механикѣ,—изобрѣтеніе, честь котораго Лейбницъ приписываетъ знаменитому астроному Рёмеру. Де-Лагиръ въ предисловіи къ *Traité des épicycloïdes* говоритъ, что онъ сдѣлалъ въ замкѣ Больe (Beaulieu) близь Парижа колесо съ эпициклоидальными зубцами *вмѣсто другаго подобнаго же, построеннаго нѣкогда Дезаргомъ*. Въ предисловіи къ *Traité de mécanique* 1695 г. Де-Лагиръ повторяетъ даже, что онъ даетъ построеніе колеса съ нечувствительнымъ треніемъ, *колеса, первое изобрѣтеніе котораго принадлежитъ Дезаргу, одному изъ лучшихъ геометровъ того столѣтія.*

31. Главный характеръ сочиненій Дезарга заключается въ большой общности теоретическихъ началъ и ихъ примѣненій, въ той общности, которая составляетъ красоту и величайшее достоинство *Начертательной Геометріи* Монжа. Такъ, въ началѣ своего сочиненія *Brouillon projet de la coupe des pierres* Дезаргъ говоритъ, что *его способъ для обдѣлки камней имѣетъ одинаковое основаніе съ способомъ его перспективы* [42]). Въ письмѣ 1643

[41]) Балье (Baillet) въ сочиненіи *Vie de Descartes* говоритъ, что эти двѣ книги Дезарга были изданы въ 1643 году. Но это ошибка: Балье смѣшиваетъ ихъ съ сочиненіями Босса, которыя явились дѣйствительно въ 1643 году; онъ не зналъ, что еще въ 1640 году было напечатано Дезаргомъ сочиненіе *Brouillon projet de la coupe des pierres* вмѣстѣ съ «*Les cadrans*» и что объ этомъ только сочиненіи могъ говорить Декартъ въ письмѣ къ Мерсенну, писанномъ въ 1641 году.

[42]) Эти слова Дезарга переданы Кюрабеллемъ въ вышеупомянутомъ сочиненіи его; стр. 70.

года, присоединенномъ къ сочиненію Босса о квадрантахъ, Дезаргъ говоритъ о своей *идеѣ и о способѣ разсматривать эти предметы въ общемъ видѣ, какъ о единственномъ способѣ, свойственномъ ученому*.

Приведемъ еще одно мѣсто изъ *Pratiques géométrales et perspectives* Босса: «Дезаргъ доказывалъ въ общемъ видѣ, посредствомъ «тѣлъ (*par les solides*), что обыкновенно не дѣлается тѣми, кото«рые называютъ себя геометрами, или математиками».

Эти слова Босса *par les solides* не значатъ ли, что Дезаргъ при доказательствахъ прибѣгалъ къ фигурамъ трехъ измѣреній для вывода свойствъ плоскихъ фигуръ? А это и составляетъ теперь характеръ школы Монжа въ изслѣдованіяхъ чистой геометріи.

Многія мѣста изъ писемъ Декарта доказываютъ, что въ своихъ математическихъ изысканіяхъ Дезаргъ не ограничивался только геометріей и ея приложеніями, но что онъ писалъ также и объ анализѣ; видно даже, что ему столько же были знакомы и предметы философскіе.

Всѣ эти подробности обнаруживаетъ геній Дезарга, который былъ высоко уважаемъ его знаменитыми современниками Декартомъ, Паскалемъ, Ферматомъ; люди же посредственные, пониманіе которыхъ было ниже новизны и общности его воззрѣній, порицали и преслѣдовали его.

Мы прибавимъ еще нѣсколько подробностей о Дезаргѣ въ Примѣчаніи XIV.

Только спустя болѣе столѣтія проявляется снова духъ методовъ Дезарга и Паскаля. Эти методы были сохранены для насъ въ первомъ сочиненіи Де-Лагира о коническихъ сѣченіяхъ 1673 г. Этотъ геометръ зналъ о сочиненіи Дезарга *Brouillon projet des coniques* и приводитъ его заглавіе; но сочиненіе Паскаля *Essai pour les coniques* было уже, кажется, совершенно забыто [43]).

---

[43]) *Cùm nihil de his Pascalii, Desarguesii autem pauca sint edità, eo gratior fuit labor doctissimi geometrae Ph. de la Hire, qui vestigiis istorum insistens multaque perpulchra de suo adjiciens, jam ante* 12 *annos libellum titulo Novae methodi sectiones conicas et cylindricas explicandi edidit*... (*Acta Erud.*, 1685, p. 400).

32. **Мидоржъ** (1585—1647). Излагая исторію трудовъ Дезарга и Паскаля по теоріи коническихъ сѣченій, мы должны вспомнить еще третьяго геометра, ихъ современника, опередившаго ихъ нѣсколькими годами въ этомъ отдѣлѣ науки. Мидоржъ (Mydorge), извѣстный какъ ученый и какъ другъ знаменитаго Декарта, былъ первый во Франціи, написавшій сочиненіе о коническихъ сѣченіяхъ, предпринявшій упростить доказательства древнихъ и рѣшившійся пойти далѣе ихъ въ этомъ предметѣ.

Сочиненіе его появилось сначала въ 1631 году въ двухъ, а потомъ въ 1641 году въ четырехъ книгахъ; за этимъ должны были слѣдовать еще четыре книги, но онѣ остались въ рукописи.

Мерсеннъ передаетъ намъ заглавія ихъ въ *Universae Geometriae mixtaeque* etc., стр. 229. Мидоржъ не имѣлъ въ виду, какъ Дезаргъ и Паскаль, главной цѣли — вывести свойства коническихъ сѣченій изъ свойствъ круга посредствомъ перспективы, или посредствомъ изслѣдованія конуса, на которомъ эти кривыя получаются. Сочиненіе его написано въ духѣ древнихъ; но онъ болѣе ихъ пользовался свойствами конуса [44]) и это дало ему возможность изъ одного доказательства вывести предложенія, которыя требуютъ трехъ доказательствъ у Аполлонія; такимъ образомъ онъ внесъ въ этотъ предметъ значительное упрощеніе.

Въ сочиненіи Мидоржа находится изящное рѣшеніе задачи «помѣстить на данномъ конусѣ данное коническое сѣченіе»; Аполлоній, въ своей шестой книгѣ, рѣшилъ эту задачу только для прямаго конуса (Теоремы 39, 40 и 41-я 3-й книги).

Вторая книга имѣетъ предметомъ построеніе коническаго сѣченія по точкамъ на плоскости. Аполлоній не занимался этой задачей, но она должна была находиться въ *Loca solida* Аристея, такъ какъ здѣсь говорилось о коническихъ сѣченіяхъ на плоскости и излагались такія свойства этихъ кривыхъ, которыхъ не было въ *Elementa conica* Аполлонія, потомучто подобное же сочиненіе, но отличное отъ *Loca solida*, было также написано Аристеемъ.

---

[44]) Мы войдемъ въ нѣкоторыя подробности о способѣ древнихъ, когда будемъ говорить о большомъ сочиненіи Де-Лагира *Traité des coniques*.

Между различными способами Мидоржа для построенія коническихъ сѣченій укажемъ на образованіе эллипса точкою прямой линіи, скользящей концами по двумъ другимъ прямымъ [45]); и еще построеніе той же кривой посредствомъ измѣненія всѣхъ ординатъ круга въ данномъ отношеніи—построеніе, которое уже было употребляемо Стевиномъ (*Oeuvres mathématiques*, p. 348).

Въ этой же книгѣ находимъ предложеніе, что если изъ какой нибудь точки въ плоскости коническаго сѣченія будемъ проводить прямыя линіи ко всѣмъ точкамъ кривой и будемъ, продолжая ихъ, увеличивать въ данномъ отношеніи, то концы этихъ линій будутъ лежать на новомъ коническомъ сѣченіи, подобномъ первому. Это очень простое предложеніе скрытымъ образомъ заключается уже въ шестой книгѣ Аполлонія, гдѣ рѣчь идетъ о подобныхъ коническихъ сѣченіяхъ, и мы приводимъ его здѣсь только потому, что оно вмѣстѣ съ предыдущимъ способомъ образованія (удлиненіемъ ординатъ въ постоянномъ отношеніи) служитъ точкою отправленія и простѣйшимъ случаемъ метода *преобразованія* фигуръ, который, какъ мы увидимъ, былъ значительно расширенъ Де-Лагиромъ и Ньютономъ, потомъ распространенъ Понселе на фигуры трехъ измѣреній въ сочиненіи о проэктивныхъ свойствахъ фигуръ; въ настоящее время этотъ методъ получилъ еще большее развитіе и мы разсматриваемъ его въ нашемъ мемуарѣ подъ названіемъ *гомографическаго преобразованія*, какъ одинъ изъ самыхъ могущественныхъ способовъ новой геометріи.

33. **Григорій С. Винцентъ** (1584—1667). Подробный разборъ сочиненій Дезарга и Паскаля, относящихся къ новой геометріи, отвлекъ насъ отъ другой части геометріи, отъ геометріи мѣры, въ которой, съ большимъ или меньшимъ искуствомъ, въ болѣе или менѣе явной формѣ, вводится безконечная величина.

---

[45]) Такой способъ черченія эллипса былъ уже доказанъ Стевиномъ, который приписываетъ изобрѣтеніе его Гвидо Убальди, и дѣйствительно онъ изложенъ въ сочиненіи Г. Убальди: *Planisphaericorum universalium Theorica*, (in—4, 1579); но этотъ способъ былъ извѣстенъ уже древнимъ; Проклъ говоритъ объ немъ въ своемъ комментаріи ко второму предложенію 1-й книги Евклида.

Возвратимся къ этому отдѣлу науки, въ которомъ мы указали, какъ изобрѣтателей, Кеплера, Гюльдена, Каваллери, Фермата, Роберваля, Паскаля. Вслѣдъ за этими геніальными людьми и на одной съ ними высотѣ мы находимъ Григорія С. Винцента (Grégoire de St.-Vincent).

Этотъ геометръ, одинъ изъ самыхъ глубокихъ знатоковъ древней геометріи, прилагалъ, подобно Каваллери и Робервалю, но совершенно самостоятельнымъ образомъ, способы Архимеда къ изысканію квадратуры криволинейныхъ пространствъ. Его способъ, называвшійся *Ductus plani in planum*, представлялъ, подобно способамъ Каваллери и Роберваля, усовершенствованіе способа истощенія; онъ былъ столь же строгъ, какъ способъ Архимеда, и болѣе другихъ удобенъ для приложеній. Большое значеніе придавало ему различное расположеніе вписанныхъ и описанныхъ около кривой многоугольниковъ, и Григорій С. Винцентъ умѣлъ этимъ воспользоваться. Въ такомъ различіи способа С. Винцента отъ способа Архимеда заключалось другое, весьма важное, преимущество: не безъ основанія можно предполагать, что дифференціальный треугольникъ, являющійся въ чертежахъ Гр. С. Винцента между кривою и двумя послѣдовательными сторонами одного изъ двухъ многоугольниковъ *à échelles* (вписаннаго или описаннаго), долженъ былъ привести Баррова, Лейбница и Ньютона къ исчисленію безконечно малыхъ. Подобнымъ образомъ связываются между собою и расширяются всѣ истины въ наукѣ; величайшія открытія не бываютъ внушаемы однимъ вдохновеніемъ, они бываютъ подготовлены гораздо ранѣе.

Григорій С. Винцентъ, заслуги котораго, несмотря на мнѣнія Гюйгенса и Лейбница [46], еще недостаточно оцѣнены, обогатилъ геометрію многочисленными открытіями также и въ теоріи кони

---

[46]) Вотъ слова Лейбница: *Majora (nempé Galileánis et Cavallerianis) subsidia attulerunt triumviri celebres, Cartesius ostensa ratione lineas Geometriae communis exprimendi per aequationes; Fermatius inventa methodo de maximis et minimis: ac Gregorius a sancto Vincentio multis praeclaris inventis.* (*Acta erudit.*, 1686, и *Oeuvres de Leibnitz*, t. III, p. 192).

ческихъ сѣченій. Ему обязаны мы замѣчательнымъ свойствомъ гиперболическихъ, ограниченныхъ асимптотами, площадей, которыя представляютъ логариѳмы абсциссъ.

Изъ очень многихъ способовъ преобразованія на плоскости коническихъ сѣченій однихъ въ другія мы должны упомянуть здѣсь о двухъ пріемахъ, сдѣлавшихся впослѣдствіи весьма употребительными въ искуствахъ и послужившихъ точкою исхода цѣлому ряду методовъ преобразованія фигуръ, составляющихъ одно изъ важнѣйшихъ ученій новой геометріи.

Первый изъ этихъ способовъ, употреблявшійся уже Стевиномъ и Мидоржемъ, состоитъ въ увеличеніи въ постоянномъ отношеніи ординатъ кривой линіи; второй въ наклоненіи этихъ ординатъ на одинаковое угловое количество, такъ что онѣ остаются параллельными между собою.

Пятнадцать лѣтъ спустя, Лейбницъ писалъ еще: *Etsi Gregorius a S. Vincentio quadraturam circuli et hyperbolae non absolverit, egregia tamen multa dedit* (*Oeuvres de Leibnitz*, t. VI, p. 189).

Монтукла въ своей *Histoire des mathématiques* выражается такъ:

«Сочиненіе Григорія С. Винцента есть истинное сокровище, богатый запасъ геометрическихъ истинъ, важныхъ и любопытныхъ открытій».

Если сочиненія Григорія С. Винцента не изучались до сихъ поръ сколько они заслуживаютъ, то причина этого безъ сомнѣнія заключается въ почти одновременномъ открытіи геометріи Декарта и исчисленія безконечно-малыхъ, которыя увлекли умы всѣхъ въ область анализа. Послѣ двоякаго свидѣтельства, приведеннаго выше, о достоинствѣ этого геометра, мы считаемъ себя вправѣ предложить молодымъ математикамъ, вѣрящимъ въ успѣхи и будущность геометріи, читать его сочиненія. Они встрѣтятъ тамъ многія, еще новыя для нихъ и прекрасныя открытія.

Въ интересной замѣткѣ Кетле о Григоріи С. Винцентѣ сказано, что онъ оставилъ много рукописей, которыя собраны въ 13 томахъ *in fol.* и находятся въ библіотекѣ въ Брюсселѣ. «Было бы желательно, прибавляетъ Кетле, чтобы кто-нибудь изъ друзей науки взялъ на себя трудъ пересмотрѣть этотъ рѣдкій памятникъ. Онъ можетъ-быть нашелъ бы тутъ вещи до сихъ поръ еще неизвѣстныя. Потому что коническія сѣченія представляютъ неистощимый источникъ свойствъ и было бы слишкомъ смѣло сказать, что этотъ предметъ совершенно исчерпанъ». (*Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 162).

Григорій С. Винцентъ преобразовывалъ кругъ въ эллипсъ каждымъ изъ этихъ способовъ и обоими вмѣстѣ, сочетая ихъ различнымъ образомъ.

Однако мы должны замѣтить, что эти два способа преобразованія представляютъ въ сущности только одинъ способъ и даютъ происхожденіе тождественно однимъ и тѣмъ же фигурамъ; это одинъ и тотъ же способъ, но въ различныхъ формахъ, имѣющихъ каждая свои особыя удобства.

Всегда полезно разсматривать подобнымъ образомъ одну и туже истину съ различныхъ точекъ зрѣнія, чтобы извлечь изъ нея всѣ выгоды и всѣ слѣдствія, къ которымъ она можетъ вести.

Теорія коническихъ сѣченій доставила уже намъ самое убѣдительное доказательство этого въ тѣхъ различныхъ преобразованіяхъ, къ которымъ, какъ мы показали, способны теоремы Дезарга и Паскаля и которыя даютъ этимъ теоремамъ возможность заключать въ себѣ безконечное число слѣдствій, обнимающихъ собою большую часть свойствъ коническихъ сѣченій (См. Прим. XV).

Григорій С. Винцентъ написалъ глубокій трактатъ о сравненіи спирали съ параболой,—предметъ, которымъ занимался также Каваллери; въ немъ находятся удивительныя сближенія между этими двумя кривыми, свойства которыхъ большею частію соотвѣтствуютъ другъ другу. Равенство двухъ соотвѣтствующихъ дугъ этихъ двухъ кривыхъ было также доказано Робервалемъ, но способомъ очень труднымъ, основаннымъ на его ученіи о составныхъ движеніяхъ; оно же было потомъ предметомъ превосходнаго мемуара Паскаля [47]), который представляетъ первый примѣръ сравненія двухъ разнородныхъ кривыхъ линій посредствомъ чистой геометріи древнихъ и безъ помощи безконечно малыхъ.

34. Еслибы мы писали полную исторію геометріи, а не только очеркъ постепенной выработки ея методовъ, относящихся по преимуществу къ новой геометріи, то мы должны бы были для пополненія второй эпохи упомянуть о трудахъ еще многихъ другихъ

---

47) *Egalité des lignes spirale et parabolique* (*Oeuvres de Pascale* t. V, p. 426—452).

геометровъ, съ успѣхомъ занимавшихся чистою геометріею древнихъ и новымъ ученіемъ о недѣлимыхъ и способствовавшихъ значительному развитію науки впослѣдствіи. Во главѣ ихъ стали бы два знаменитые ученика Галилея: Торичелли и Вивіани, превосходныя и важныя изслѣдованія которыхъ мы изложили бы съ особою любовію; потомъ Leotaud, La Loubère, Gregory, Etienne de Angelis, Michel-Ange Ricci. Mercator, Schooten, Ceva, Huygens, Sluze, Wren, Nicolas, Lorenzini, Guido-Grandi и др.

Многіе изъ этихъ геометровъ занимались также возникавшею въ то время геометріею Декарта и потому будутъ играть роль въ слѣдующей эпохѣ между двигателями этого великаго изобрѣтенія.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ТРЕТЬЯ ЭПОХА.

1., **Декартъ**. (1596—1650) Важнѣйшая услуга была оказана геометріи Декартомъ. Этотъ философъ, благодаря неоцѣненной мысли своей *о приложеніи алгебры къ теоріи кривыхъ линій*, создалъ орудіе для преодолѣнія препятствій, останавливавшихъ до тѣхъ поръ величайшихъ геометровъ, и существенно измѣнилъ видъ математическихъ наукъ [1]).

Это ученіе Декарта, ни малѣйшаго зачатка котораго мы не находимъ въ сочиненіяхъ древнихъ геометровъ и о которомъ одномъ только, можетъ-быть, можно сказать то, что̀ сказалъ Монтескье о своемъ *Esprit de lois*: «*proles sine matre creata*»,—это ученіе, говорю я, придало геометріи характеръ отвлеченности и всеобщности, существенно отличившій ее отъ геометріи древнихъ. Способы, созданные Каваллери, Ферматомъ, Роберваленъ, Григоріемъ С. Винцентомъ, носили также отпечатокъ этой общности въ ихъ метафизическихъ принципахъ; но они не имѣли ея въ приложеніяхъ. Только идея Декарта доставила средство прилагать эти способы однообразнымъ и общимъ образомъ; она была необходимымъ введеніемъ къ новымъ исчисленіямъ Лейбница и Ньютона, которыя не замедлили возродиться изъ этихъ превосходныхъ способовъ.

---

[1]) Приложеніе алгебры къ теоріи кривыхъ линій есть предметъ Геометріи Декарта, которая вмѣстѣ съ его сочиненіями *Traité des Météores* и *Dioptrique* появилась въ Лейденѣ въ 1637 году вслѣдъ, и какъ бы въ видѣ испытанія, за его знаменитымъ *Méthode*, на которомъ основывается современная философія.

Конечно ни одна философская система не имѣла при своемъ появленіи такой поддержки, какую давали методу Декарта подобныя испытанія.

Геометрія Декарта, кромѣ этого характера всеобъемлемости, представляетъ въ сравненіи съ геометріею древнихъ еще другое особое отличіе, на которое слѣдуетъ обратить вниманіе: она, посредствомъ одной формулы, указываетъ общія свойства цѣлыхъ группъ кривыхъ линій, такъ что, когда этимъ путемъ открывается какое-нибудь свойство одной кривой, тотчасъ же узнаются такія же или подобныя свойства во множествѣ другихъ линій. До этихъ же поръ изучались только отдѣльныя свойства нѣкоторыхъ кривыхъ, разсматриваемыхъ порознь, и всегда посредствомъ такихъ пріемовъ, которые не устанавливали никакой связи между различными кривыми.

Съ этихъ поръ началось быстрое развитіе геометріи, и успѣхи ея распространились на всѣ другія науки, находящіяся съ нею въ прикосновеніи. Сама алгебра получила въ ней полезное пособіе, ея символическія дѣйствія стали болѣе наглядны, значеніе ея расширилось и обѣ эти главныя отрасли нашихъ положительныхъ знаній пошли съ этихъ поръ одинаково вѣрными шагами.

Достаточно указать на одно изъ первыхъ и самыхъ важныхъ преимуществъ, доставленныхъ геометріею алгебрѣ, именно на истолкованіе и употребленіе отрицательныхъ рѣшеній, которыя до тѣхъ поръ считались не имѣющими никакого значенія и такъ сильно затрудняли древнихъ аналистовъ.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, который Декартъ изобрѣлъ въ своей геометріи и которымъ онъ съ такимъ успѣхомъ пользовался, есть также одно изъ самыхъ глубокомысленныхъ и самыхъ полезныхъ открытій въ анализѣ.

Прибавленіе. Въ письмахъ Декарта встрѣчается много мѣстъ, относящихся къ геометріи. Его книга *Opuscula posthuma* (Amst. 1701, in 4) также заключаетъ въ себѣ нѣсколько отрывковъ по геометріи. Жаль, что никто еще не подумалъ собрать всѣ эти разсѣянные отрывки и присоединить ихъ къ одному изъ многочисленныхъ изданій геометріи Декарта.

Мы ограничимся указаніемъ въ письмахъ знаменитаго философа на одинъ особый методъ, изобрѣтенный имъ для рѣшенія задачи,

занимавшей неоднократно какъ его самого, такъ и его современниковъ Фермата, Роберваля и Паскаля, именно задачи о касательной къ циклоидѣ. Методъ Декарта, въ то время пользовавшійся большою извѣстностію, чрезвычайно простъ и можетъ примѣняться, какъ замѣтилъ это и Декартъ, къ укороченнымъ и растянутымъ циклоидамъ и даже вообще ко всѣмъ кривымъ, образуемымъ точкою плоской кривой, катящейся по другой, неподвижной, кривой. Способъ состоитъ въ томъ, что обѣ кривыя разсматриваются какъ многоугольники съ безконечнымъ числомъ сторонъ. Многоугольники эти прикасаются другъ къ другу по общей сторонѣ и потому въ каждый моментъ имѣютъ двѣ общія вершины; во время безконечно-малаго перемѣщенія первый многоугольникъ вращается около одной изъ вершинъ, остающейся неподвижною, и точка многоугольника, образующая кривую, описываетъ слѣдовательно дугу круга, центръ котораго находится въ неподвижной вершинѣ; нормаль къ этой дугѣ, представляющей элементъ описываемой кривой, проходитъ такимъ образомъ черезъ упомянутую вершину.

Этотъ способъ, существенно отличающійся отъ всѣхъ другихъ способовъ проведенія касательныхъ, примѣняется съ тѣхъ поръ постоянно, благодаря его необыкновенной простотѣ. Но безъ сомнѣнія вслѣдствіе именно этой простоты онъ не обратилъ на себя должнаго вниманія геометровъ; его употребляли только въ этой самой задачѣ и довольствовались распространеніемъ его еще на сферическія эпициклоиды. Изслѣдовавъ, въ чемъ заключаются отличительныя особенности и различія этого способа отъ другихъ рѣшеній задачи о касательныхъ, мы старались узнать, не способенъ ли принципъ, лежащій въ его основаніи, къ такому обобщенію, которое дѣлало бы его примѣнимымъ ко всякой другой задачѣ.

Слѣдующая теорема представляетъ, какъ намъ кажется, обобщеніе этого способа Декарта.

Когда плоская фигура получаетъ безконечно малое перемѣщеніе въ своей плоскости, то всегда существуетъ точка, остающаяся во время этого движенія неподвижной.

Нормали, проводимыя въ различныхъ точкахъ фигуры къ траэкторіямъ, описываемымъ этими точками во время безконечно малаго движенія, проходятъ всѣ черезъ упомянутую неподвижную точку.

На основаніи этой теоремы для построенія нормали къ кривой, описываемой точкою движущейся плоской фигуры, достаточ-

но опредѣлить точку, которая остается неподвижной въ тотъ моментъ, когда образующая точка приходитъ въ разсматриваемую точку кривой. Положеніе неподвижной точки опредѣляется при помощи условій движенія фигуры.

Если, напримѣръ, извѣстно движеніе двухъ точекъ фигуры, то искомая неподвижная точка опредѣлится пересѣченіемъ нормалей къ описываемымъ кривымъ.

Пусть прямая данной длины движется такъ, что концы ея остаются на двухъ неподвижныхъ прямыхъ; извѣстно, что при этомъ каждая точка какъ на самой прямой, такъ и внѣ ея, но неизмѣняемо съ нею соединенная, будетъ описывать эллипсъ. Чтобы опредѣлить нормаль къ этой кривой, проведемъ черезъ концы движущейся прямой перпендикуляры къ неподвижнымъ прямымъ: искомая нормаль пройдетъ черезъ точку пересѣченія этихъ перпендикуляровъ.

Движеніе фигуры можетъ быть опредѣлено различными другими условіями, съ помощію которыхъ также легко удается найти эту неподвижную точку.

Положимъ, напримѣръ, что описывается конхоида Никомеда точкою прямой линіи, проходящей чрезъ неподвижную точку и скользящею однимъ концомъ по неподвижной прямой. Разсмотримъ движущуюся прямую въ какомъ-нибудь положеніи; возставимъ къ ней перпендикуляръ въ неподвижной точкѣ и другой перпендикуляръ къ неподвижной линіи въ той точкѣ, гдѣ лежитъ конецъ движущейся прямой. Пересѣченіемъ этихъ двухъ перпендикуляровъ опредѣлится искомая точка, черезъ которую проходитъ нормаль конхоиды.

Мы не будемъ здѣсь останавливаться на другихъ разнообразныхъ условіяхъ перемѣщенія плоской фигуры и не будетъ изыскивать тѣ кривыя, къ которымъ помощію этого пріема легко проводятся касательныя.

Предыдущаго достаточно для указанія, что изложенная нами теорема представляетъ обобщеніе идеи, высказанной Декартомъ по поводу касательной къ циклоидѣ, и что теорема эта ведетъ къ особому способу касательныхъ, отличающемуся отъ всѣхъ другихъ и даже отъ способа Роберваля, хотя онъ также основанъ на мысли о движеніи. Замѣтимъ впрочемъ, что примѣненіе этого легкаго способа, также какъ и способа Роберваля, ограниченно, потому что въ немъ предполагаются извѣстными геометрическія условія перемѣщенія фигуры, точка которой описываетъ данную кривую. Способъ этотъ примѣнимъ однако какъ къ большому числу особыхъ кривыхъ, такъ и къ цѣлымъ семействамъ.

Приложенія нашей теоремы не ограничиваются геометріей, но могутъ быть также полезны и въ механикѣ при вычисленіи живыхъ силъ. Дѣйствительно, изъ теоремы слѣдуетъ, что живыя силы различныхъ точекъ подвижной фигуры пропорціональны квадратамъ ихъ разстояній отъ той точки, которая въ данный моментъ остается неподвижною; слѣдовательно, если положеніе этой точки извѣстно, то достаточно знать живую силу еще одной какой-нибудь точки фигуры. Понселе заявилъ мнѣ, что имъ сдѣлано подобное приложеніе этой теоремы ко многимъ вопросамъ о машинахъ—вопросамъ, въ которыхъ до сихъ поръ не существовало никакого геометрическаго способа для вычисленія живыхъ силъ.

Нѣсколько лѣтъ тому назадъ (См. *Bulletin universel des sciences*, t. 14) мы представили эту теорему какъ частный случай теоремы о какомъ-либо конечномъ перемѣщеніи фигуры въ плоскости и даже какъ частный случай болѣе общей теоремы о двухъ подобныхъ фигурахъ, расположенныхъ какъ угодно на плоскости. Обѣ эти теоремы зависятъ въ свою очередь отъ слѣдующаго еще болѣе общаго принципа.

Разсмотримъ на плоскости двѣ фигуры, которыя первоначально были перспективами одна другой и потомъ помѣщены на плоскости какимъ бы то ни было образомъ; каждая точка одной фигуры будетъ при этомъ имѣть себѣ соотвѣтственную на другой; существуетъ вообще три точки одной фигуры, которыя совпадаютъ съ своими соотвѣтственными точками на другой фигурѣ; одна изъ этихъ точекъ всегда дѣйствительная, двѣ же другія могутъ быть мнимыми.

Отсюда слѣдуетъ, что на одной фигурѣ существуютъ также три прямыя, совпадающія съ соотвѣтственными прямыми второй фигуры: это именно прямыя, соединяющія три сказанныя точки.

Одна изъ такихъ прямыхъ всегда дѣйствительная; двѣ другія могутъ быть мнимыми.

Когда двѣ фигуры подобны, что представляетъ частный случай перспективы, то двѣ изъ трехъ точекъ и двѣ изъ трехъ прямыхъ будутъ всегда мнимыя; третья точка дѣйствительная; третья прямая также дѣйствительная, но лежитъ въ безконечности.

Тоже будетъ и въ томъ случаѣ, когда двѣ фигуры равны между собою.

Этимъ свойствамъ плоскихъ фигуръ существуютъ соотвѣтствующія въ фигурахъ трехъ измѣреній и я вывелъ уже нѣсколько теоремъ, относящихся къ этой теоріи (См. *Bulletin universel des sciences*, t. 14, p. 321, 1830).

2. Духъ и пріемы геометріи Декарта слишкомъ коротко извѣстны всѣмъ, знакомымъ даже только съ первыми основными началами математики, такъ что намъ нѣтъ надобности входить въ подробности по этому предмету. Мы прямо перейдемъ къ обзору сочиненій важнѣйшихъ писателей, жившихъ во время Декарта и развивавшихъ его геометрію, расширяя при ея помощи кругъ математическихъ истинъ преимущественно въ области теоріи кривыхъ линій.

Ферматъ. Прежде всѣхъ должно упомянуть о Ферматѣ и Робервалѣ. Еще до появленія геометріи Декарта Ферматъ самъ употреблялъ подобные же аналитическіе пріемы. Но сочиненія его, основывавшіяся главнымъ образомъ на его прекрасномъ способѣ *de maximis et minimis*, по своимъ свойствамъ и своему особому характеру приближались скорѣе къ геометрическимъ сочиненіямъ древнихъ, чѣмъ къ трудамъ Декарта.

Роберваль. Роберваль, вслѣдствіе ревниваго соперничества, существовавшаго между нимъ и великимъ философомъ, критиковалъ до малѣйшихъ подробностей новую геометрію и этимъ существенно способствовалъ ея распространенію. Съ другой стороны онъ нѣкоторымъ образомъ воздалъ ей должный почетъ, оставивъ намъ искусное примѣненіе свойственнаго ей способа къ построенію *мѣстъ* посредствомъ уравненій въ сочиненіи подъ заглавіемъ *De resolutione aequationum*.

3. **Де-Бонъ.** (De Beaune, 1601 — 1651). При появленіи геометріи Декарта духъ и значеніе ея были усвоены преимущественно Де-Бономъ; онъ облегчилъ чтеніе новой геометріи примѣчаніями, которыя цѣнились высоко самимъ Декартомъ и которыя были прибавлены къ нѣкоторымъ мѣстамъ, затруднявшимъ по краткости изложенія и по новости предмета даже лучшихъ геометровъ.

Де-Бону первому принадлежитъ мысль ввести въ теорію кривыхъ линій свойства касательныхъ, какъ элементъ для построенія кривыхъ; онъ же, по поводу одной задачи подоб-

наго рода, предложенной имъ Декарту, изобрѣлъ обратный способъ касательныхъ. Онъ предложилъ именно построить такую кривую, чтобы субтангенсъ (считаемый по оси абсциссъ), раздѣленный на ординату, имѣлъ постоянное отношеніе къ отрѣзку ординаты, заключающемуся между кривою и постоянною прямою, проходящею черезъ начало кривой подъ угломъ 45° къ оси абсциссъ [2]).

Задача эта, трудная даже при пособіи интегральнаго исчисленія и по изобрѣтеніи этого исчисленія занимавшая собою Лейбница и братьевъ Бернулли, была разрѣшена Декартомъ, привыкшимъ побѣждать самыя большія затрудненія въ геометріи: Декартъ съумѣлъ привести эту задачу къ геометрическимъ мѣстамъ, разсматривая каждую точку кривой какъ пересѣченіе двухъ безконечно-близкихъ касательныхъ. Этимъ путемъ онъ открылъ, что кривая имѣетъ асимптоту параллельную постоянной прямой и что субтангенсъ, взятый по направленію этой прямой, имѣетъ постоянную величину. Свойства эти привели Декарта къ построенію касательныхъ къ кривой и къ построенію самой кривой посредствомъ двухъ линеекъ, движущихся съ опредѣленными скоростями. Несоизмѣримость этихъ движеній показала ему, что кривая принадлежитъ къ разряду механическихъ, къ которымъ его анализъ не примѣнимъ. Поэтому онъ и не далъ ея уравненія. (*Lettres de Descartes*, t, VI, p. 137) [3]).

Декартъ въ своей геометріи разсматривалъ только такія кривыя, уравненія которыхъ по его системѣ координатъ были опредѣленной конечной степени; онъ называлъ ихъ кривыми *геометрическими*, присвоивъ остальнымъ названіе *механическихъ*. Лейбницъ ввелъ названіе *алгебраическія* и *транс*-

---

[2]) *Lettres de Descartes*, t. IV, p. 215.

[3]) Письмо, въ которомъ Декартъ излагаетъ Де-Бону свои идеи объ этихъ совершенно новаго рода изысканіяхъ, разсматриваемыхъ имъ какъ обратныя его правилу касательныхъ, есть, по нашему мнѣнію, одинъ изъ важнѣйшихъ документовъ и должно занять почетное мѣсто въ исторіи новаго исчисленія.

цендентныя кривыя. Теперь употребляютъ безразлично выраженія *геометрическія* и *алгебраическія* для обозначенія кривыхъ, бывшихъ предметомъ геометріи Декарта. Мы будемъ пользоватся постоянно первымъ названіемъ, потому что обозначаемыя имъ кривыя отличаются нѣкоторыми общими геометрическими свойствами столько же, какъ и видомъ ихъ уравненій; притомъ эти свойства могутъ быть доказываемы путемъ чисто-геометрическимъ безъ помощи системы координатъ и алгебраическихъ формулъ Декарта.

4. **Шутенъ.** (Schooten,16.—1659) написалъ пространный комментарій къ геометріи Декарта и далъ многочисленныя приложенія его способа въ сочиненіи *Exercitationes Geometricae,* преимущественно въ 3-й книгѣ, представляющей возстановленіе *Loca plana* Аполлонія, и также въ 5-ой книгѣ, имѣющей заглавіе: *De lineis curvis superiorum generum, ex solidi sectione ortis.* Здѣсь находимъ мы первый примѣръ примѣненія способа координатъ къ кривымъ въ пространствѣ; впрочемъ дѣло идетъ пока только о плоскихъ кривыхъ и Шутенъ употребляетъ только двѣ координаты. Но самые вопросы подобнаго рода были тогда еще новы и были первымъ шагомъ въ аналитической геометріи трехъ измѣреній, которая, какъ увидимъ въ концѣ третьей эпохи, развилась только спустя пятьдесятъ лѣтъ.

Шутенъ написалъ еще трактатъ *объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій*, гдѣ онъ указываетъ различные способы чертить эти кривыя непрерывнымъ движеніемъ. Черченіе эллипса помощію точки прямой, скользящей концами по сторонамъ угла, было извѣстно еще прежде: оно указано было Гвидо Убальди и Стевиномъ и ведетъ начало еще отъ отъ древнихъ геометровъ, о чемъ нами было уже сказано по поводу Прокла. Шутенъ обобщилъ этотъ пріемъ, распространивъ его на случай, когда образующая точка находится внѣ прямой. Въ сочиненіи, кромѣ способовъ черченія коническихъ сѣченій, находимъ вычисленіе ихъ квадратуръ по способу недѣлимыхъ Кавальери.

Прибавленіе. Арабы также занимались органическимъ образованіемъ кривыхъ линій и въ особенности коническихъ сѣченій. Это видно изъ заглавій трехъ слѣдующихъ сочиненій, находящихся въ Лейденской библіотекѣ.

1) *Ahmed ben Ghalit Sugiureus: De conicarum sectionum descriptione.*

2) *Abu Schel Cumaeus: De circino pepfecto, quo etiam sectiones conicae et aliae lineae curvae describi possunt.*

3) *Mah. ben Husein; De circino perfecto et formatione linearum.* (См. *Catalogus librorum tam impressorum quam manuscriptorum bibliothecae publicae universitatis Lugduno Batavae;* in fol. 1716, p. 454, 455).

5. Вторая книга *Exercitationes Geometricae* есть собраніе задачъ, разрѣшаемыхъ посредствомъ одной прямой линіи. Это первые примѣры, относящіеся къ той особой геометріи, которая въ послѣднее время изслѣдована въ подробности Сервуа и Бріаншономъ подъ именемъ *геометріи линейки.* Въ концѣ 2-й книги, подъ заглавіемъ *Appendix,* Шутенъ рѣшаетъ двѣнадцать задачъ, въ которыхъ точки или линіи предполагаются невидимыми или недоступными по причинѣ препятствій. Шутенъ говоритъ, что на подобныя изысканія онъ наведенъ былъ чтеніемъ сочиненія *Geometria peregrinans,* авторъ котораго рѣшаетъ при помощи однихъ кольевъ задачи практической геометріи, приложимыя главнымъ образомъ къ военному дѣлу. Сочиненіе это, безъ имени автора и безъ указанія времени изданія, не показалось Шутену старымъ и по его мнѣнію напечатано было въ Польшѣ.

6. Шутенъ принадлежалъ къ числу тѣхъ математиковъ, которые, въ виду могущественныхъ и возбуждавшихъ удивленіе пособій, оказываемыхъ анализомъ геометріи, приписывали аналитическимъ пріемамъ ясность и изящество въ доказательствахъ и построеніяхъ древнихъ геометровъ, обвиняя ихъ въ сокрытіи настоящаго пути къ своимъ открытіямъ ради возбужденія большаго удивленія въ потомствѣ. Въ подтвержденіе этого мнѣнія, Шутенъ на многихъ при-

мѣрахъ [4]) показалъ, что синтетическій способъ всегда можетъ былъ выведенъ изъ аналитическаго. Но Шутенъ не позаботился разъяснить истинное значеніе слова *анализъ*, какъ его понимали древніе, и въ особенности тѣхъ примѣровъ анализа, которые намъ оставлены Паппомъ; въ этомъ заключается причина ошибки Шутена: разумѣя подъ анализомъ только употребленіе алгебры и не находя никакого слѣда ея до Діофанта, онъ вывелъ заключеніе, что древніе скрывали свой анализъ.

Это обвиненіе было высказано въ первый разъ Ноніусомъ въ его *Алгебрѣ* и потомъ повторено во II главѣ *Алгебры* Валлиса; впослѣдствіи оно потеряло значеніе и сочтено было неосновательнымъ.

7. **Слюзъ** (Sluze, 1623—1685) и **Гуддъ** (Hudde, 1640—1704) усовершенствовали способы Декарта и Фермата для проведенія касательныхъ и для изысканія *maxima* и *minima;* Слюзъ пополнилъ прекрасное построеніе уравненій третьей и четвертой степени посредствомъ круга и параболы, данное Декартомъ, показавъ, что для этого можетъ служить кругъ и какое угодно коническое сѣченіе данной величины; обобщеніе это было важно для того времени.

8. **Де-Виттъ** (De Witt, 1625—1672), знаменитый пенсіонарій Голландіи, упростилъ аналитическую теорію геометрическихъ мѣстъ Декарта; онъ изобрѣлъ новую и остроумную теорію коническихъ сѣченій, основанную на различныхъ построеніяхъ этихъ кривыхъ на плоскости безъ помощи конуса; изъ этой теоріи онъ вывелъ важнѣйшія свойства коническихъ сѣченій чисто-геометрическимъ путемъ.

Построенія Де-Витта приводятся къ пересѣченіямъ прямыхъ линій, представляющихъ большею частію стороны дви-

---

[4]) *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico.* Посмертное изданіе.—Здѣсь находимъ аналитическое доказательство теоремы Птоломея объ отрѣзкахъ сѣкущей на трехъ сторонахъ треугольника.

жущихся угловъ. До этого времени подобный способъ построенія извѣстенъ былъ только для параболы. Построенія эллипса и гиперболы или прямо основывались на кругѣ или требовали пособія этой кривой.

Должно впрочемъ замѣтить, что уже Кавальери старался найти построеніе эллипса и гиперболы помощію прямой линіи, подобное построенію параболы; его изысканія имѣли успѣхъ, доставившій этому знаменитому геометру, по собственному его признанію, живое удовольствіе [5]). Вотъ основаніе его способа, которое мы для ясности излагаемъ въ болѣе общемъ видѣ: „Представимъ себѣ уголъ и проведемъ рядъ сѣкущихъ, параллельныхъ между собою; изъ точекъ встрѣчи каждой сѣкущей со сторонами угла проведемъ соотвѣтственно прямыя къ двумъ неподвижнымъ точкамъ; пары такихъ прямыхъ будутъ пересѣкаться въ точкахъ, геометрическое мѣсто которыхъ есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ неподвижныя точки".

Кавальери доказываетъ не эту общую теорему, а одинъ изъ частныхъ случаевъ ея: у него разсматривается уголъ прямой, неподвижныя точки берутся на сторонахъ угла и направленіе сѣкущихъ таково, что эти неподвижныя точки служатъ вершинами кривой.

Такимъ образомъ мысль, руководившая Де-Виттомъ при построеніи коническихъ сѣченій помощію прямой линіи, не была совершенно новая; но Кавальери ограничился только одною весьма частною теоремою изъ этой въ высшей степени богатой результатами теоріи, и потому сочиненіе Де-Витта представляло важную новость, на которую нельзя не обратить вниманія въ исторіи геометріи.

Построенія Де-Витта, кромѣ новизны, заключали въ себѣ зародышъ органическаго образованія коническихъ сѣченій,

---

[5]) *Exercitationes geometricae sex.* Bononiae, in—4⁰,1647. *De modo facili describendi sectiones conicas, et in omnibus uniformi.* (*Exercitatio sexta*).

даннаго Ньютономъ въ 1-й книгѣ *Principia* и потомъ повтореннаго въ *Enumeratio linearum tertii ordinis* и въ *Arithmetica universalis*. И дѣйствительно, большинство теоремъ Де-Витта получается изъ теоремы Ньютона, если предположимъ въ ней уголъ равнымъ нулю и вершину его въ безконечности.

Изъ предисловія къ сочиненію Де-Витта видно, что авторъ смотрѣлъ на свое сочиненіе, какъ на введеніе въ общую теорію и перечисленіе кривыхъ линій высшаго порядка. Эта плодотворная мысль была осуществлена черезъ пятьдесять лѣтъ Ньютономъ, Маклореномъ и Брайкенриджемъ.

9. **Валлисъ** (Wallis, 1616—1703) написалъ первый *Аналитическій трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ* въ духѣ Декартовой геометріи. Но по преимуществу занимался онъ тою частію геометріи, къ которой относятся открытія Архимеда. Соединяя въ *Ариѳметикѣ безконечныхъ* анализъ Декарта со способомъ недѣлимыхъ Кавальери, онъ значительно способствовалъ успѣхамъ геометріи въ тѣхъ вопросахъ, которые теперь относятся къ области интегральнаго исчисленія.

10. Гюйгенсъ, Фанъ Геретъ и Нейль способствовали также развитію Декартовой геометріи.

Фанъ-Геретъ (Van-Heuraet) и **Нейль** (Neil) первые разрѣшили задачу о выпрямленіи кривой линіи; задача эта, по мнѣнію нѣкоторыхъ геометровъ того времени, считалась абсолютно неразрѣшимой и представляла весьма большія и совершенно особыя затрудненія.

11. **Гюйгенсъ** (Huygens, 1629—1695) знаменитъ весьма многими трудами и они имѣютъ такое важное значеніе для геометріи, что мы должны войти здѣсь въ нѣкоторыя подробности.

Этотъ великій геометръ основательно зналъ способъ Декарта, пользовался имъ и усовершенствовалъ его во многихъ приложеніяхъ. Но по неопреодолимой склонности Гюйгенсъ

оставался вѣренъ способу древнихъ и здѣсь сила его генія умѣла торжествовать надъ величайшими трудностями.

Чтобы указать мѣсто, которое долженъ занимать Гюйгенсъ въ исторіи математики, достаточно замѣтить, что Ньютонъ называлъ его великимъ (Summus Hugenius) и говорилъ о его открытіяхъ не иначе какъ съ удивленіемъ. „Онъ считалъ его самымъ краснорѣчивымъ изъ всѣхъ новыхъ математиковъ и самымъ лучшимъ подражателемъ древнихъ, которыхъ доказательства по изяществу и формѣ заслуживаютъ удивленія" [6]).

Приводимъ обзоръ открытій, которыми Гюйгенсъ обязанъ геометріи древнихъ и которыя обнаруживаютъ, какъ много способы древнихъ могутъ доставить тому, кто съумѣетъ постигнуть ихъ сущность и усмотрѣть свойственные имъ пути нагляднаго изслѣдованія.

Занимаясь приблизительнымъ опредѣленіемъ квадратуры круга и гиперболы, Гюйгенсъ открылъ нѣсколько новыхъ и любопытныхъ соотношеній между этими двумя кривыми.

Онъ далъ распрямленіе циссоиды; до тѣхъ поръ извѣстны были только распрямленія кубической параболы и циклоиды.

Онъ опредѣлилъ величину поверхности для параболическихъ и гиперболическихъ коноидовъ—первый примѣръ подобнаго опредѣленія величины кривыхъ поверхностей.

Ему мы обязаны любопытными теоремами о логариѳмикѣ и образуемыхъ ею тѣлахъ. Эти теоремы только указаны Гюйгенсомъ въ концѣ его рѣчи о причинѣ тяжести; онѣ доказаны Гвидо-Гранди по способу древнихъ.

---

[6]) Pemberton, въ предисловіи къ элементамъ Ньютоновой философіи. Можно думать, что это справедливое удивленіе геометрическому стилю Гюйгенса вызвало въ великомъ Ньютонѣ нѣкотораго рода соревнованіе, вслѣдствіе котораго онъ предпочелъ этотъ же способъ изложенія въ своемъ безсмертномъ сочиненіи *Principia*, хотя владѣлъ уже всѣми пособіями новаго анализа.

Говоря это, мы повторяемъ мнѣніе, высказанное Морисомъ (baron Maurice) въ его превосходной статьѣ: *Notice sur la vie et les travaux d'Huygens.*

Гюйгенсъ разрѣшилъ 1) задачу о цѣпной линіи; задача эта первоначально представилась Галилею, но не была имъ правильно рѣшена, потомъ снова выведена на сцену Яковомъ Бернулли, 2)—задачу о кривой равныхъ разстояній (courbe aux approches égales), предложенную Лейбницемъ ученикамъ Декарта, какъ вызовъ по поводу спора объ измѣреніи живой силы. Обѣ эти задачи по мнѣнію знаменитыхъ геометровъ, ихъ предложившихъ, необходимо требовали пріемовъ интегральнаго исчисленія; Гюйгенсъ же съумѣлъ разрѣшить ихъ только помощію способовъ древней геометріи.

12. Знаменитое сочиненіе *De horologio oscillatorio* должно занимать мѣсто въ исторіи великихъ открытій человѣческаго ума на ряду съ *Principia* Ньютона; оно служитъ ему необходимымъ введеніемъ, которое Ньютонъ необходимо долженъ бы былъ создать, если бы не былъ предупрежденъ геніемъ Гюйгенса.

Каждая глава этого сочиненія возбуждаетъ удивленіе.

Въ первой главѣ описываются часы съ маятникомъ, послужившіе въ первый разъ средствомъ для точнаго измѣренія времени.

Вторая глава, подъ заглавіемъ *De descensu gravium*, пополняла собою великое открытіе Галилея объ ускореніи тѣлъ, свободно падающихъ или скользящихъ по наклонной плоскости, отъ тяжести. Гюйгенсъ разсматриваетъ ихъ движеніе по какимъ нибудь даннымъ кривымъ. Здѣсь онъ доказалъ то знаменитое свойство циклоиды, что она есть *таутохрона* въ пустомъ пространствѣ.

Содержаніе третьей главы (*De evolutione et dimensione linearum curvarum*) есть извѣстная теорія *развертокъ*,—важное пріобрѣтеніе для теоріи кривыхъ линій, получившее обширное и частое примѣненіе во всѣхъ частяхъ математики. Это замѣчательнное открытіе не осталось въ рукахъ Гюйгенса простымъ геометрическимъ соображеніемъ. Онъ вывелъ изъ него весьма удачныя слѣдствія для доказательства множества новыхъ и замѣчательныхъ предложеній, каковы раз-

личныя теоремы о распрямленіи кривыхъ и то свойство циклоиды, что ея развертка есть другая равная ей циклоида, которую можно разсматривать какъ ту же циклоиду, но перемѣщенную по направленію основанія на длину полуокружности образующаго круга, а въ направленіи перпендикулярномъ къ основанію—на длину діаметра этого круга [7]).

Въ четвертой главѣ *Horologium oscillatorium* Гюйгенсъ разрѣшаетъ общимъ и полнымъ образомъ знаменитую задачу о *центрѣ качаній*, предложенную Мерсенномъ и сильно занимавшую Декарта и Роберваля. Въ рѣшеніи Гюйгенса встрѣчается въ первый разъ одно изъ самыхъ лучшихъ началъ механики, сдѣлавшееся впослѣдствіи извѣстнымъ подъ именемъ *начала сохраненія живыхъ силъ*.

Наконецъ пятая глава, гдѣ Гюйгенсъ даетъ другое построеніе своихъ часовъ, оканчивается тринадцатью знаменитыми теоремами о *центробѣжной силѣ* круговаго движенія.

Приложеніе этого ученія къ движенію земли вокругъ оси и къ движенію луны около земли,—приложеніе, зачатокъ котораго находится въ 2, 3 и 5 изъ этихъ теоремъ,—привело Ньютона къ открытію тяготѣнія между луною и землей. На это же ученіе можно смотрѣть, какъ на дополненіе къ теоріи развертокъ; оно естественнымъ образомъ вело къ познанію центральной силы криволинейнаго движенія, которая есть также одно изъ величайшихъ открытій Ньютона, доставившее ему доказательство *à priori* знаменитыхъ законовъ Кеплера. Но эти выводы ускользнули отъ ума Гюйгенса, занятаго множествомъ другихъ великихъ соображеній.

---

[7]) При такомъ расположеніи, циклоида вмѣстѣ съ своей разверткой образуетъ какъ бы двухъ-этажный мостъ: точки опоры верхняго этажа лежатъ на высшихъ точкахъ нижняго.

Обыкновенно говорятъ, что развертка циклоиды есть вторая циклоида равная и *обратно расположенная* (posée dans une *position renversée*, ou bien posée *en sens contraire*). (См. *Analyse des infiniment petits* du marquis de Lhopital, p. 92 и *Histoire des Mathématiques* de Montucla, t. II p. 72, 154). Такой способъ выраженія ошибоченъ и потому то мы подробно описали взаимное положеніе циклоиды и ея развертки.

13. Сочиненіе о свѣтѣ есть одно изъ самыхъ прекрасныхъ произведеній генія Гюйгенса; съ удивительнымъ искуствомъ онъ умѣлъ примѣнить здѣсь геометрію къ своей геніальной теоріи волнъ. Особенно замѣчателенъ въ этомъ сочиненіи прекрасный законъ явленій двойнаго лучепреломленія, открытый Гюйгенсомъ въ исландскомъ шпатѣ. Здѣсь встрѣчаемъ первое, кажется, примѣненіе къ явленіямъ природы поверхностей втораго порядка. Это великое открытіе было пополнено Френелемъ, который для объясненія явленій поляризаціи свѣта ввелъ вмѣсто эллипсоидальныхъ волнъ Гюйгенса поверхность четвертаго порядка [8]). Френель, похищенный

[8]) Для этой поверхности четвертаго порядка Френель предложилъ слѣдующее весьма замѣчательное геометрическое построеніе, благодаря которому главная роль во всей этой теоріи остается за поверхностями втораго порядка: *представимъ себѣ эллипсоидъ* (главныя полуоси котораго пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ трехъ главныхъ силъ упругости среды, или скоростямъ свѣта по направленію осей упругости); *проведемъ черезъ центръ какую нибудь сѣкущую и отложимъ на ней, считая отъ центра, отрѣзки равные главнымъ полуосямъ эллипса, получаемаго отъ пересѣченія эллипсоида діаметральною плоскостію перпендикулярною къ направленію сѣкущей: концы отрѣзковъ этихъ будутъ лежать на поверхности четвертаго порядка, о которой мы говоримъ.* (См. *Mémoire sur la double réfraction* Френеля въ VII томѣ *Mémoires de l'Académie*; мемуаръ Ампера: *Détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les trois directions principales, etc.* напечатанный въ *Annales de chimie et de physique* 1828 года; и *Traité de la lumière de Herschel*, traduction de M. M. Verhulst et Quetelet, томъ II, стр. 190).

Вслѣдствіе этой теоремы изъ прекрасныхъ законовъ поляризаціи, открытыхъ въ послѣднее время знаменитыми физиками, въ особенности Біо и докторомъ Брюстеромъ, получаются непосредственно геометрическія свойства эллипсоида и вообще поверхностей втораго порядка.

Такимъ образомъ оптическія явленія, уже бросившія яркій свѣтъ на внутренее строеніе кристаллическихъ тѣлъ, могутъ принести пользу также и въ изученіи раціональной геометріи.

Едвали можно найти болѣе блестящій примѣръ взаимной связи между науками и болѣе очевидное доказательство тому, какъ необходима всѣмъ наукамъ взаимная помощь для вѣрнаго и быстраго движенія впередъ.

преждевременною смертью у наукъ математическихъ и физическихъ, въ которыхъ онъ уже былъ первостепеннымъ дѣятелемъ, своими изслѣдованіями придалъ новую жизнь теоріи Гюйгенса, которая болѣе ста лѣтъ находилась въ необъяснимомъ забвеніи; онъ поставилъ ее на то мѣсто, которое она должна занимать въ ряду великихъ истинъ физическаго міра.

Слѣдуетъ указать еще на одинъ прекрасный математическій выводъ, полученный Гюйгенсомъ изъ его *Теоріи свѣта*: выводъ, который въ послѣднее время былъ вновь полученъ Кетле и только послѣ этого обратилъ на себя вниманіе геометровъ и принесъ надлежащіе плоды. Гюйгенсъ, при помощи своей системы волнъ, нашелъ слѣдующее предложеніе: „положимъ, что падающіе лучи, исходящіе изъ неподвижной точки или параллельные между собою, преломляются, встрѣчая кривую линію; представимъ себѣ кругъ описанный изъ свѣтящей точки, какъ изъ центра, или прямую линію перпендикулярную къ направленію параллельныхъ лучей; если изъ каждой точки преломляющей кривой, какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ, длина котораго находится въ извѣстномъ постоянномъ отношеніи къ разстоянію этой точки отъ круга, или отъ неподвижной прямой, то огибающая такихъ новыхъ окружностей будетъ кривая, *къ которой нормальны всѣ преломленные лучи*".

Кривая эта представляетъ *преломленную волну*. Отсюда Гюйгенсъ вывелъ законъ постояннаго отношенія синусовъ угловъ паденія и преломленія.

Такимъ образомъ Гюйгенсъ разсматривалъ кривую нормальную къ преломленнымъ лучамъ, подобно тому, какъ Чирн-

---

Главнымъ образомъ изъ этого сближенія можно, кажется, предвидѣть, что поверхностямъ втораго порядка суждено играть важную роль при выводѣ всѣхъ самыхъ общихъ законовъ природы; поэтому должно спѣшить открытіемъ и изученіемъ многочисленныхъ свойствъ этихъ поверхностей, какъ въ каждой изъ нихъ отдѣльно, такъ и во взаимныхъ отношеніяхъ ихъ между собою.

гаузенъ впослѣдствіи [9]) разсматривалъ огибающую этихъ лучей. Но только послѣдняя кривая произвела впечатлѣніе на умы геометровъ и изученіе ея сдѣлалось основаніемъ для ихъ трудовъ по оптикѣ. Первая же осталась незамѣченною, какъ будто бы она не основывалась, подобно той, на чисто геометрическомъ построеніи, независимомъ отъ сомнительной въ то время системы, послужившей къ ея открытію.

Между тѣмъ, кривая Гюйгенса вообще гораздо проще, чѣмъ кривая Чирнгаузена и гораздо удобнѣе примѣняется къ изученію оптическихъ свойствъ кривыхъ линій. Достаточно сказать, напримѣръ, что каустическая Чернгаузена, образуемая при преломленіи на кругѣ, не поддалась до сихъ поръ никакимъ усиліямъ анализа, который не можетъ даже дать ея уравленія, тогда какъ соотвѣтственная кривая Гюйгенса есть просто *оваль* Декарта — кривая четвертаго порядка, свойства и уравненіе которой получаются посредствомъ нѣкоторыхъ геометрическихъ соображеній, или посредствомъ нѣсколькихъ строкъ вычисленія [10]).

Не смотря на это, кривыя Гюйгенса остались незамѣченными и только десять лѣтъ тому назадъ Кеглс, стараясь

---

[9]) Чирнгаузенъ въ 1682 году сообщилъ Парижской Академіи Наукъ свои первыя соображенія и первые результаты теоріи каустическихъ линій: Гюйгенсъ за три года до этого представилъ той же Академіи свое сочиненіе *Traité de la Lumière.* Въ то время Гюйгенсъ уже давно имѣлъ свою теорію развертокъ; поэтому ему стоило сдѣлать только небольшой шагъ, чтобы дать свое имя знаменитымъ каустическимъ кривымъ, изобрѣтеніе которыхъ и употребленіе, какъ въ оптикѣ, такъ и въ геометріи при выпрямленіи нѣкоторыхъ кривыхъ, составляютъ славу Чирнгаузена.

[10]) Не менѣе замѣтна разница между кривыми Чирнгаузена и Гюйгенса при преломленіи на прямой линіи: первая изъ нихъ есть кривая шестаго порядка, требующая продолжительныхъ вычисленій; вторая же есть просто эллипсъ, или гипербола, какъ это было доказано въ первый разъ Жергонномъ. (*Annales de Mathématiques, t.* XI, p. 229).

Этотъ ученый геометръ еще прежде высказалъ предположеніе, что каустическія кривыя могутъ имѣть развертывающими—кривыя, гораздо болѣе простыя, чѣмъ онѣ сами (*Annales de Math.* t. V, p. 289).

уменьшить затрудненія, представляемыя анализомъ въ вопросахъ о преломленіи свѣта, задумалъ замѣнить въ этой теоріи каустическія линіи Чернгаузена—ихъ развертывающими; слѣдуя этой счастливой мысли, онъ пришелъ, путемъ чисто геометрическихъ соображеній, къ построенію этихъ развертывающихъ, какъ огибающихъ перемѣщающагося круга; такимъ образомъ эти кривыя соотвѣтствуютъ, какъ мы видимъ, преломленнымъ волнамъ Гюйгенса; Кетле назвалъ ихъ *вторичными каустическими* (*caustiques secondaires*); этотъ искусный геометръ распространилъ тоже ученіе на случай, когда падающіе лучи перпендикулярны къ данной кривой, и также на случай, когда падающіе лучи въ пространствѣ нормальны къ данной поверхности [11]).

Это обобщеніе также заключалось уже въ теоріи Гюйгенса. Изъ него получается прямо слѣдующій прекрасный законъ преломленія свѣта: „падающіе лучи, нормальные къ одной и той же поверхности, обладаютъ тѣмъ же свойствомъ и послѣ преломленія ихъ другою какою нибудь поверхностью; и, слѣдовательно, раздѣляются послѣ преломленія на двѣ группы, образующія два ряда развертывающихся, пересѣкающихъ другъ друга подъ прямыми углами“. Малюсъ замѣтилъ первый справедливость этой теоремы для пучка лучей, выходящихъ изъ одной точки, или параллельныхъ между собою; но онъ полагалъ, на основаніи весьма сложныхъ вычисленій, что теорема не можетъ быть распространена на систему лучей, нормальныхъ къ какой нибудь поверхности [12]). Дюпенъ, путемъ чисто геометрическихъ соображеній, придалъ въ первый разъ теоремѣ Малюса всю свойственную ей общность [13]).

Изъ предыдущихъ замѣчаній видно, какіе полезные и богатые задатки нашли бы въ трактатѣ о свѣтѣ Гюйгенса геометры, если бы они захотѣли ранѣе довѣриться указаніямъ

---

[11]) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III, IV et V.

[12]) *Mémoire sur l'optique*, n° 22 и 27, въ 14-й тетради *Journal de l'école Polytechnique.*

[13]) *Applications de Géométrie et de Mécanique*; *Mémoire sur les routes de la lumière*, p. 192.

этого великаго генія. Замѣчательный примѣръ медленности, съ какою подвигаются и совершенствуются наши положительныя знанія, и суровый урокъ для гордости человѣческаума.

Можетъ быть это отступленіе чуждо развитію собственно геометрическихъ методовъ, но, по крайней мѣрѣ, оно касается лучшихъ приложеній ихъ къ наукамъ физическимъ; оно, можетъ быть, привлечетъ кого нибудь изъ нашихъ молодыхъ читателей къ этому еще новому роду геометрическихъ изысканій, обѣщающему обильные результаты [14]).

14. Удивительная глубина мысли, обнаруженная Гюйгенсомъ во всѣхъ этихъ важныхъ вопросахъ, подвергнутыхъ имъ геометрическому изслѣдованію, отличаетъ также его изысканія въ механикѣ; напримѣръ въ знаменитой задачѣ объ ударѣ тѣлъ, разрѣшенной имъ въ одно время съ Валлисомъ и Вреномъ, и также—въ его астрономическихъ открытіяхъ, поставившихъ его имя нераздѣльно съ именами Кеплера, Галилея и Ньютона.

Хотя способъ древнихъ былъ постоянно почти единственнымъ орудіемъ для его сужденій и изслѣдованій, однако ему были извѣстны всѣ пріемы не только Декартовой геометріи, но и новаго вычисленія Лейбница; это великое открытіе онъ изучилъ, какъ только оно появилось, и умѣлъ оцѣнить всѣ выгоды его [15]).

---

[14]) Гамильтону, директору Дублинской обсерваторіи, продолжающему прекрасныя изслѣдованія Френеля, удалось примѣнить къ самымъ сложнымъ и деликатнымъ явленіямъ свѣта новый способъ вычисленія, который, кажется, долженъ вести къ математическимъ законамъ, обнимающимъ всю эту обширную и важную теорію

Съ особымъ удовольствіемъ узнали мы отъ Г. Кетле, что другой ученый геометръ, Макъ-Куллагъ, занятъ такими же изслѣдованіями, какъ Гамильтонъ, но при пособіи чисто геометрическихъ пріемовъ.

Труды Макъ-Куллага возстановятъ, можетъ быть, геометрію въ глазахъ справедливыхъ и беспристрастныхъ людей и возвратятъ должное уваженіе къ способамъ Гюйгенса и Ньютона.

[15]) Лейденскій университетъ обладаетъ многими рукописями, завѣщанными ему Гюйгенсомъ; тамъ, кромѣ сочиненій этого великаго чело-

15. **Барровъ** (1630—1677). Между современниками Валлиса и Гюйгенса, наиболѣе способствовавшими успѣхамъ геометріи, мы должны упомянуть о Барровѣ, профессорѣ Ньютона въ Глазговскомъ университетѣ. Въ 1669 году онъ издалъ свое сочиненіе *Lectiones Geometricae*, въ которомъ заключается много глубокихъ изысканій о свойствахъ кривыхъ линій и, преимущественно, о ихъ размѣрахъ. Особенно замѣчательна вторая лекція *о способѣ касательныхъ*; у Баррова этотъ способъ въ сущности мало отличается отъ способа Фермата, но въ немъ разсматривается малый дифференціальный треугольникъ и въ вычисленія вмѣсто одного вводится два безконечно малыя количества; это составляетъ еще шагъ къ ученію и символическому обозначенію Лейбница.

Познанія въ греческомъ и арабскомъ языкахъ дали Баррову возможность принести пользу наукѣ хорошими переводами на латинскій языкъ *элементовъ* и *данныхъ* Евклида, четырехъ первыхъ книгъ Аполлонія, сочиненій Архимеда и *сферики* Ѳеодосія. Во всѣхъ этихъ переводахъ доказательства большею частію передѣланы и значительно упрощены.

Въ 1684 году были изданы подъ заглавіемъ *Lectiones mathematicae* лекціи, читанныя Барровомъ въ 1664, 1665 и 1666 годахъ въ Кембриджскомъ университетѣ о математической философіи, и еще четыре лекціи, неизвѣстнаго времени, имѣющія предметомъ разъясненіе способа, служившаго Архимеду для его важнѣйшихъ открытій, и указаніе на значительное различіе этого способа отъ современнаго анализа [16]). Послѣдній предметъ изложенъ у Баррова со всевозможною точностію и ясностію; къ сожалѣнію другія его математическія лекціи усѣяны греческими цитатами, затрудняющими чтеніе.

вѣка, находится собраніе писемъ, которыя онъ получалъ отъ всѣхъ ученыхъ своего времени. Кураторы университета нѣсколько лѣтъ тому назадъ думали напечать часть этого драгоцѣннаго наслѣдства. Чѣмъ скорѣе исполнится это похвальное намѣреніе, тѣмъ лучше.

[16]) *Quo planius appareat qualem ille subtilissimus vir* (Archimedes) *analysin usurparit, et quam hodiernae nostrae parum dissimilem.*

Наконецъ, въ *Lectiones opticae,* Барровъ съ большимъ искуствомъ прилагалъ геометрію ко многимъ вопросамъ объ отраженіи и преломленіи свѣта на кривыхъ поверхностяхъ. Онъ строилъ точки, въ которыхъ пересѣкаются безконечно-близкіе лучи; но, не смотря на его любовь и привычку къ геометрическимъ соображеніямъ, ему не пришло на мысль разсматривать кривую, происходящую отъ послѣдовательности такихъ точекъ, т.-е. огибающую этихъ лучей; подобно Гюйгенсу онъ былъ близокъ къ открытію этой кривой, но оставилъ честь этого открытія Чирнгаузену.

16. Теперь именно мѣсто говорить о геометрѣ, котораго мы только что назвали.

Чирнгаузенъ. (1651—1708). Чирнгаузенъ получилъ большую извѣстность своими знаменитыми *каустическими* кривыми. Дѣйствительно, это открытіе тотчасъ же сдѣлалось основаніемъ многихъ физико-математическихъ теорій. Какъ открытіе чисто геометрическое, оно представляло двойную выгоду; оно являлось, съ одной стороны, послѣ *развертокъ* Гюйгенса вторымъ примѣромъ образованія кривыхъ линій чрезъ огибаніе движущейся прямой; и, съ другой стороны, приводило ко множеству распрямляемыхъ кривыхъ.

Каустическія кривыя, также какъ и развертки, являлись въ нѣкоторомъ смыслѣ практическимъ примѣненіемъ идеи Де-Бона:—опредѣлять кривыя линіи какимъ нибудь общимъ свойствомъ ихъ касательныхъ.

Но не это отвлеченное сужденіе привело Гюйгенса и Чирнгаузена къ открытію кривыхъ, носящихъ ихъ имена; дальнѣйшее развитіе мысли Де-Бона было дано Лейбницемъ, который даже обобщилъ ее, изслѣдуя огибающую безконечнаго множества прямыхъ или опредѣленныхъ кривыхъ линій, связанныхъ между собою какимъ нибудь общимъ свойствомъ [17]).

17. Чирнгаузенъ, человѣкъ съ высокими способностями и одинъ изъ самыхъ страстныхъ любителей избранной имъ

---

[17]) *Acta Erud. Lips.* an. 1692 et 1694, и *Oeuvres de Leibnitz*, t. III, p. 284 et 296.

науки, занимаетъ по многимъ причинамъ, не говоря объ открытіи каустическихъ линій, почетное мѣсто въ исторіи геометріи.

Въ сочиненіи своемъ *Medicina mentis*, 1686 [18]), предметъ котораго заключался въ указаніи правилъ для руководства при изысканіи истины, Чирнгаузенъ, основываясь на той мысли, что предметы, изучаемые въ математикѣ, образуются при движеніи относительно чего нибудь неподвижнаго, предложилъ новое и всеобщее образованіе кривыхъ линій. Онъ представлялъ себѣ, что онѣ описываются остріемъ, натягивающимъ нить, которая, будучи концами укрѣплена въ двухъ неподвижныхъ точкахъ, скользитъ по нѣсколькимъ другимъ точкамъ, или навертывается на нѣкоторыя извѣстныя кривыя. Это, какъ мы видимъ, есть обобщеніе способа черченія коническихъ сѣченій помощію фокусовъ,—обобщеніе, которое еще Декартъ имѣлъ мысль примѣнить къ черченію своихъ оваловъ [19]).

Чирнгаузенъ дѣлилъ кривыя линіи на нѣсколько родовъ, смотря по большему или меньшему числу ихъ фокусовъ и смотря по свойствамъ неподвижныхъ кривыхъ. Онъ показалъ способъ проводить касательныя къ описаннымъ такимъ образомъ кривымъ и это послужило началомъ задачи касательной къ кривой, выраженной уравненіемъ между разстояніями какой нибудь ея точки отъ нѣсколькихъ неподвижныхъ точекъ.

18. Эта задача имѣла нѣкокорую извѣстность и была рѣшена посредствомъ различныхъ оригинальныхъ пріемовъ первыми математиками того времени: прежде всего геомет-

---

[18]) *Medicina mentis, sive tentamen genuinae logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates.* In—4⁰, Amst.

Въ III томѣ *Bibliothèque universelle et historique* (1686 г.) находится весьма подробный разборъ этого замѣчательнаго сочиненія Чирнгаузена.

[19]) *Géométrie de Descartes*, liv. 2. Кривыя эти, изобрѣтенныя Декартомъ, играли важную роль особенно въ его *Діоптрикѣ*. Мы будемъ говорить о нихъ въ четвертой эпохѣ, гдѣ встрѣтимъ ихъ воспроизведенными въ 1-й книгѣ *Principia* Ньютона.

ромъ Fatio de Duiller, который обнаружилъ ошибку, вкравшуюся у Чирнгаузена и предложилъ рѣшеніе, основанное на простыхъ геометрическихъ соображеніяхъ и представляющее по нашему мнѣнію одинъ изъ лучшихъ и въ настоящее время весьма рѣдкихъ примѣровъ приложенія способа древнихъ къ построенію касательныхъ [20]); потомъ—маркизомъ Лопиталемъ, который на основаніи безконечно-малыхъ и безъ всякаго вычисленія нашелъ изящное и совершенно общее рѣшеніе этой задачи [21]); и наконецъ въ то же самое время—Лейбницемъ, рѣшеніе котораго, „имѣющее ту выгоду, что оно все совершается въ умѣ безъ вычисленія и чертежа", основывалось на прекрасной теоремѣ механики, найденной Лейбницемъ именно по этому случаю [22]). Черезъ нѣсколько лѣтъ послѣ этого Германъ еще пополнилъ эту теорію, показавъ для тѣхъ же кривыхъ Чирнгаузена очень простое построеніе радіуса кривизны, опредѣляемаго прямо, путемъ чи-

---

[20]) *Reflexions de M. Fatio de Duiller sur une méthode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes;* въ *Bibliothèque universelle et historique*, t. V, an. 1688.

Чирнгаузенъ отвѣчалъ на эти размышленія Fatio и призналъ свою ошибку въ X томѣ того же сборника за тотъ же годъ.

[21]) *Analyse des infinimens petits*, section 2-e; prop 10.

[22]) Лейбницъ изслѣдовалъ задачу въ такой формѣ: „провести касательную къ кривой линіи, описываемой натянутыми нитями". Построеніе его основывается на *общемъ правилѣ составленія движеній*; вводя вмѣсто понятія о движеніи понятіе о силѣ, какъ сдѣлалъ это Лангранжъ въ *Mécanique analytique* при изложеніи условія равновѣсія, проистекающаго изъ правила Лейбница, мы можемъ выразить это правило такимъ образомъ: „Если силы, дѣйствующія въ какомъ угодно числѣ на точку, изобразимъ по величинѣ и направленію прямыми линіями, то равнодѣйствующая ихъ пройдетъ черезъ центръ тяжести концовъ этихъ линій и по величинѣ будетъ равна разстоянію этого центра тяжести отъ точки приложенія, умноженному на число всѣхъ силъ". (*Journal des Savans*, sept. 1693, и *Oeuvres de Leibnitz*, t. III, p. 283).

Теорема эта можетъ быть распространена на случай силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ. (*Correspondance mathématique de Bruxelles*, t. V, p. 106).

стой геометріи, безъ помощи вспомогательныхъ координатъ Декарта [23]).

Пуансо распространилъ тотъ же способъ образованія на кривыя поверхности и на построеніе ихъ нормалей и пользовался имъ съ успѣхомъ въ своемъ превосходномъ мемуарѣ по механикѣ [24]).

19. Возвратимся къ Чирнгаузену. Въ 1701 году этотъ геометръ представилъ Академіи наукъ новый общій способъ, который, по его словамъ, могъ замѣнить собою исчисленіе безконечно-малыхъ во множествѣ вопросовъ высшей геометріи, напримѣръ при построеніи касательныхъ и радіусовъ кривизны [25]). Но этотъ способъ, основывавшійся на анализѣ Декарта, оказался подражаніемъ двумъ способамъ проведенія касательныхъ, предложеннымъ Декартомъ и заключавшимся въ томъ, что двѣ точки кривой разсматриваются сначала на конечномъ разстояніи и потомъ предполагаются слившимися.

Большое впечатлѣніе произвело въ то время заглавіе, подъ которымъ Чирнгаузенъ представилъ одно изъ своихъ открытій, именно: *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indéfiniment petite* [26]); дѣйствительно, оно должно было живо затронуть любопытство геометровъ и упрочило бы за авторомъ, уже безъ того извѣстнымъ, безсмертную славу, если бы обѣщаніе было выполнено имъ совершенно. Но предложенный способъ далеко не распространялся на всѣ механическія кривыя и относился только къ одному роду линій, въ которыхъ абсциссами служатъ дуги геометрической кри-

---

[23]) *Methodus inveniendi radios osculi in curvis ex focis descriptis.* Acta Eruditorum, an. 1702; p. 501).

[24]) *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes;* 13-я тетрадь *Journal de l'école polytechnique.* Мемуаръ этотъ перепечатанъ въ 6-мъ изданіи *Statique* Пуансо.

[25]) *Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences,* an 1701.

[26]) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* an. 1702.

вой, къ которой умѣемъ проводить касательныя, а ординатами—линіи, параллельныя постоянной прямой; самое вычисленіе у Чирнгаузена ничѣмъ не отличалось отъ обыкновеннаго случая абсциссъ, считаемыхъ по прямой, а не по кривой линіи. Впрочемъ способъ этотъ все таки имѣетъ нѣкоторое значеніе, какъ расширеніе способовъ Декарта, который, какъ мы знаемъ, исключилъ изъ своей геометріи, для большей послѣдовательности и удовлетворительности, *механическія* кривыя, разумѣя подъ этимъ именемъ всѣ кривыя, которыя не могутъ опредѣляться посредствомъ точной и извѣстной мѣры. Съ 1682 года Чирнгаузенъ излагалъ въ Лейпцигскихъ Актахъ свой способъ касательныхъ къ геометрическимъ кривымъ подъ заглавіемъ *Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi* и обѣщалъ приложить его впослѣдствіи къ механическимъ кривымъ.

20. *Размышленія о методахъ въ геометріи.* Постоянная цѣль Чирнгаузена при всѣхъ этихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ заключалась въ томъ, чтобы упростить геометрію, и основывалась на убѣжденіи, что настоящіе, истинные методы должны быть просты, что самые остроумные изъ нихъ не могутъ быть истинными, если они очень сложны, и что необходимо существуетъ возможность найти что нибудь болѣе простое.

Мы съ намѣреніемъ указываемъ на эту мысль Чирнгаузена, въ полномъ убѣжденіи, что всѣ геометрическія истины имѣютъ дѣйствительно этотъ характеръ и что всѣ онѣ одинаково способны къ простымъ, и очень часто очевиднымъ, доказательствамъ. И дѣйствительно, извѣстны весьма многіе примѣры такихъ истинъ, которыя сначала представляли величайшія затрудненія и не уступали никакимъ усиліямъ всѣхъ извѣстныхъ методовъ, но впослѣдствіи дѣлались самыми простыми и очевидными. Это потому, что первоначально онѣ зависѣли отъ невполнѣ сложившихся и недостаточно обобщенныхъ теорій и основывались не на истинныхъ, свойственныхъ имъ, началахъ.

Скажемъ здѣсь мимоходомъ, что, по нашему мнѣнію, именно въ этомъ заключается главное преимущество современнаго анализа предъ геометріей. Первый изъ этихъ способовъ изслѣдованія имѣетъ необыкновенно выгодное право пренебрегать всѣми промежуточными предложеніями, тогда какъ для втораго способа они всегда необходимы и онъ долженъ ихъ изобрѣтать для всякаго новаго вопроса. Но это прекрасное и драгоцѣнное преимущество анализа имѣетъ, какъ и всѣ человѣческія сужденія, свою слабую сторону: этотъ быстрый и проницательный путь не всегда бываетъ достаточно ясенъ для нашего ума; онъ скрываетъ истины, связывающія найденное предложеніе съ точкою отправленія, тогда какъ все это вмѣстѣ должно бы составлять одно полное цѣлое, одну истинную теорію. Развѣ при глубокомъ и философскомъ изученіи науки достаточно знать, что такое-то положеніе справедливо, ни зная, какъ и почему оно справедливо, не зная, какое мѣсто занимаетъ найденная истина въ ряду другихъ съ нею однородныхъ?

Чтобы при настоящемъ состояніи геометріи достигнуть цѣли Чирнгаузена, т.-е. безпредѣльнаго усовершенствованія этой науки, надобно, какъ намъ кажется, соблюдать при всѣхъ изслѣдованіяхъ два слѣдующія правила:

1° Обобщать болѣе и болѣе частныя предложенія, чтобы такимъ образовъ дойти мало по малу до самаго общаго предложенія, которое всегда будетъ въ то же время самымъ простымъ, самымъ естественнымъ и самымъ понятнымъ.

2° Не довольствоваться при доказательствѣ теоремы, или при рѣшеніи задачи, первымъ результатомъ, который могъ бы быть достаточнымъ для частнаго изслѣдованія, независимаго отъ общей системы всего отдѣла науки; напротивъ, удовлетворяться доказательствомъ, или рѣшеніемъ, только тогда, когда простота рѣшенія, или очевидный выводъ его изъ какой нибудь уже извѣстной теоріи, покажутъ, что мы привели изслѣдуемый вопросъ къ такому ученію, отъ котораго онъ естественно зависитъ.

Длѣ убѣжденія въ томъ, что, прилагая эти правила, мы достигли желаемой цѣли, т.-е. нашли надлежащій путь къ окончательной истинѣ и дошли до ея начала, можно намъ кажется руководствоваться мыслію, что во всякой теоріи должна существовать и быть извѣстна одна основная истина, изъ которой всѣ другія должны выводиться легко, какъ ея видоизмѣненія или слѣдствія, и что только выполненіе этого требованія можетъ служить признакомъ дѣйствительнаго совершенства науки. Прибавимъ вмѣстѣ съ однимъ изъ новыхъ геометровъ, много размышлявшимъ о философіи математическихъ наукъ: „нельзя думать, что мы знаемъ уже послѣднее слово какой нибудь теоріи, пока мы не въ состояніи объяснить ее въ немногихъ словахъ первому встрѣчному“ [27]). И въ самомъ дѣлѣ, великія и первоначальныя истины, изъ которыхъ истекаютъ всѣ остальныя,—истины, составляющія настоящія основанія науки,—всегда имѣютъ характеристическимъ признакомъ своимъ—простоту и очевидность [28]).

21) *Раздѣленіе геометріи на три отрасли.* Изъ предложеннаго краткаго разбора громадныхъ успѣховъ, сдѣланныхъ геометріею въ теченіе какихъ нибудь тридцати лѣтъ, можно было видѣть, что эти успѣхи имѣли источникомъ два вели-

---

[27]) Мнѣніе Жергона, которое онъ высказалъ по поводу своей новой теоріи каустическихъ линій Кегле. (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. IV, p. 88).

[28]) Это мнѣніе, принятое въ положительныхъ наукахъ, есть опытный выводъ изъ исторіи развитія каждой изъ нихъ. Но его можно также подтвердить *a priori*. Дѣйствительно, самые общіе принципы, т.-е. тѣ, которые обнимаютъ наибольшее число частныхъ случаевъ, должны быть свободны отъ тѣхъ разнообразныхъ обстоятельствъ, которыя придаютъ различный и отличительный характеръ всѣмъ частнымъ фактамъ, пока эти послѣдніе разсматриваются отдѣльно и пока неизвѣстна ихъ взаимная связь и общее происхожденіе; потому что, еслибы общіе принципы были осложнены всѣми частными обстоятельствами и свойствами, то это же отразилось бы и на всѣхъ ихъ слѣдствіяхъ и они могли бы вообще вести только къ истинамъ въ высшей степени затруднительнымъ и сложнымъ. Слѣдовательно, самые общіе принципы необходимо должны быть по самому существу своему наиболѣе простыми.

кія открытія, именно: ученіе о *недѣлимыхъ* Кавальери и *приложеніе анализа къ кривымъ линіямъ* Декарта.

Первое изъ нихъ удобно примѣнялось къ обычнымъ формамъ и пріемамъ древней геометріи; поэтому на открытія, вызванныя способомъ Кавальери, смотрѣли, какъ на успѣхи въ области чистой геометріи древнихъ.

Второе открытіе, представляя исключительно аналитическое орудіе, сдѣлало изъ геометріи совершенно новую науку, которая возбудила бы удивленіе Архимеда и Аполлонія, которые не оставили намъ никакого зародыша ея; ее стали называть *смѣшанною геометріею* (mixte), *аналитическою геометріею*, или *геометріею Декарта.*

Но въ то время, какъ устанавливалось это дѣленіе геометрическихъ методовъ, возникалъ еще третій способъ изслѣдованія, такъ сказать третій видъ геометріи. Это тотъ способъ, который, какъ мы уже говорили, былъ употребляемъ Паскалемъ и Дезаргомъ и первые зачатки котораго находились въ поризмахъ Евклида и были сохранены намъ въ Математическомъ Собраніи Паппа.

Мы видимъ такимъ образомъ, что геометрія раздѣлилась на три отрасли.

Во первыхъ, на геометрію древнихъ, вспомоществуемую ученіями о недѣлимыхъ и о составныхъ движеніяхъ.

Во вторыхъ, на анализъ Декарта, усиленный пріемами исчисленія безконечныхъ, заключавшимися въ способѣ *de maximis et minimis* Фермата.

Въ третьихъ, на чистую геометрію, которая существенно отличается характеромъ отвлеченности и общности; первые примѣры ея находятся въ сочиненіяхъ о коническихъ сѣченіяхъ Паскаля и Дезарга и ниже мы увидимъ, что Монжъ и Карно въ началѣ нынѣшняго столѣтія утвердили ее на широкихъ и плодотворныхъ началахъ.

Эта третья отрасль, которая теперь составляетъ то, что называется *новою геометріею* (récente), свободна отъ алгебраическихъ исчисленій; хотя она пользуется съ одинаковымъ

успѣхомъ метрическими соотношеніями фигуръ, также какъ и начертательными ихъ свойствами, зависящими только отъ положенія, но въ ней разсматриваются только извѣстнаго рода отношенія между прямолинейными разстояніями, не требующія ни символическихъ обозначеній алгебры, ни ея дѣйствій.

Геометрія эта составляетъ продолженіе *геометрическаго анализа* древнихъ, отъ котораго она нисколько не отличается по цѣли и сущности своихъ изслѣдованій; но она представляетъ передъ анализомъ древнихъ неизмѣримыя преимущества по общности, единству и отвлеченности сужденій, по своимъ методамъ, замѣнившимъ частныя, неполныя и безсвязныя предложенія, составлявшія всю науку и единственное орудіе древнихъ, и, наконецъ, преимущественно по полезному въ высшей степени употребленію фигуръ трехъ измѣреній въ вопросахъ геометріи на плоскости.

Къ этой общей геометріи относятся, вмѣстѣ съ своими приложеніями, тѣ теоріи, которыя въ новѣйшее время получили названіе *Géométrie de la règle* и *Géométrie de situation*, смотря по тому, употребляются ли въ нихъ для открытія начертательнахъ свойствъ фигуръ пересѣченія только прямыхъ линій, или также пересѣченія кривыхъ и поверхностей въ пространствѣ.

Изъ трехъ указанныхъ нами существенно различныхъ отраслей геометріи, вторая, т.-е. анализъ Декарта, представляла столько привлекательности и столько громадныхъ выгодъ, что ею съ замѣтнымъ предпочтеніемъ стали заниматься великіе геометры, названные нами въ третьей эпохѣ.

При этомъ не слѣдуетъ забывать, что геометрія Декарта не принадлежитъ къ разряду частныхъ соображеній, но представляетъ всеобщее орудіе, примѣнимое ко всѣмъ геометрическимъ соображеніямъ, какъ древнимъ, такъ и новымъ.

22. Однако нѣкоторые математики еще оставались вѣрны способамъ древнихъ. Между ними слѣдуетъ преимущественно отличить Де-Лагира.

Де-Лагиръ (1640—1718). Этотъ геометръ былъ хорошо знакомъ съ геометріею Декарта, но сочиненія, которыми онъ обогатилъ чистую геометрію и которыя имѣли большой успѣхъ, были написаны имъ въ духѣ древнихъ.

Онъ былъ также достойнымъ продолжателемъ ученій Дезарга и Паскаля и ввелъ въ геометрію многія нововведенія, приближающіяся къ современнымъ пріемамъ, преимущественно въ его новомъ способѣ образованія коническихъ сѣченій на плоскости. Такимъ образомъ мы имѣемъ два повода говорить здѣсь объ этомъ знаменитомъ математикѣ.

Вотъ важнѣйшія сочиненія его, написанныя въ духѣ древней геометріи: большой трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ, подъ заглавіемъ: *Sectiones conicae in novem libros distributae* (in fol. Paris 1685); *Mémoire sur les épicycloïdes*, въ которомъ содержится опредѣленіе размѣровъ этихъ кривыхъ, ихъ развертки и употребленіе въ механикѣ для построенія зубчатыхъ колесъ [29]); другой мемуаръ о томъ же предметѣ, но въ обобщенномъ видѣ и въ примѣненіи ко всякаго рода кривымъ, подъ заглавіемъ: *Traité des roulettes, où l'on démontre la manière universelle de trouver leurs touchantes, leurs points d'inflexion et de rebroussement, leurs superficies et leurs longueurs, par la Géométrie ordinaire* [30]); и, наконецъ, мемуаръ *о конхоидахъ* вообще, о ихъ касательныхъ, размѣрахъ, длинѣ дугъ, точкахъ перегиба (напечатанъ въ *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1708).

---

[29]) Мемуаръ этотъ явился въ 1694 году вмѣстѣ съ другими мемуарами Де-Лагира по математикѣ и физикѣ. Онъ былъ напечатанъ вновь въ IX томѣ прежнихъ *Mémoires de l'Académie des Sciences.*

Де-Лагиръ говоритъ здѣсь, что уже двадцать лѣтъ тому назадъ онъ открылъ эпициклоиды и ихъ употребленіе въ механикѣ. Впослѣдствіи Лейбницъ требовалъ, чтобы честь этого двойнаго открытія была приписана знаменитому астроному Ремеру, которымъ оно сдѣлано было въ 1674 году во время его пребыванія въ Парижѣ. Но, какъ мы уже говорили выше, открытіе это, или по крайней мѣрѣ его механическая сторона, по словамъ самого Де-Лагира, восходитъ вѣроятно до Дезарга.

[30]) Напечатано въ *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1704.

Къ этому перечню мы должны прибавить еще *Traité de Gnomonique*, 1682—сочиненіе для того времени совершенно новое, гдѣ всѣ вопросы рѣшены Де-Лагиромъ графически, даже безъ прямолинейной тригонометріи, при помощи только циркуля, линейки и отвѣса.

Прибавленіе. Изъ новыхъ практическихъ вопросовъ, находящихся въ Гномоникѣ Де-Лагира, намъ слѣдуетъ упомянуть объ одномъ, потому что онъ основывается на геометрическихъ соображеніяхъ, относящихся къ ученіямъ новой геометріи.

Дѣло идетъ о построеніи часовыхъ линій, пользуясь для этого нѣкоторыми изъ нихъ, уже начерченными. Де-Лагиръ рѣшаетъ три слѣдующія задачи:

Въ первой предполагаются извѣстными семь послѣдовательныхъ часовыхъ линій.

Во второй—четыре послѣдовательныя и равноденственная линіи.

Въ третьей—три послѣдовательныя, равноденственная и горизонтальная линіи.

По этимъ даннымъ опредѣляются всѣ прочія линіи.

Положимъ, что въ первомъ случаѣ намъ даны семь послѣдовательныхъ часовыхъ линій: X, XI, XII, I, II, III, и IV. Вотъ построеніе, которое даетъ авторъ для опредѣленія пяти остальныхъ.

Черезъ точку o линіи IV проведемъ сѣкущую, параллельную линіи X; она встрѣтится съ линіями III, II, I, XII и XI въ точкахъ a, b, c, d, e; отложимъ на сѣкущей по другую сторону отъ o отрѣзки oa', ob', oc', od', oe', соотвѣтственно равные oa, ob, oc, od, oe; точки a', b, c', d', e' будутъ принадлежать пяти искомымъ часовымъ линіямъ.

Дѣйствительно, двѣ часовыя плоскости X и IV взаимно перпендикулярны; часовыя плоскости III и V одинаково наклонены къ плоскости IV и слѣдовательно онѣ гармонически сопряжены относительно первыхъ двухъ плоскостей X и IV.

Изъ этого слѣдуетъ, что двѣ часовыя линіи III и V гармонически сопряжены относительно часовыхъ линій X и IV; поэтому всякая сѣкущая встрѣчаетъ эти четыре линіи въ четырехъ гармоническихъ точкахъ и, слѣдовательно, если сѣкущая параллельна линіи X, то двѣ точки встрѣчи ея съ линіями III и V будутъ на равныхъ разстояніяхъ отъ точки встрѣчи ея съ линіею IV. Это и нужно было доказать *).

*) Это геометрическое доказательство, заимствованное нами изъ сочиненія Де-Лагира, столь же строго, какъ и кратко; однако Деламбръ

Мы не будемъ приводить здѣсь рѣшеній Де-Лагира для другихъ двухъ задачъ; они также просты, какъ и первое, и также основываются на началахъ элементарной геометріи, относящихся къ теоріи трансверсалей.

Но эти три задачи естественнымъ образомъ вызываютъ одно замѣчаніе и мы удивляемся, какъ оно не было сдѣлано въ разныхъ сочиненіяхъ, заимствовавшихъ у Де-Лагира рѣшеніе этихъ задачъ.

не считаетъ его вполнѣ удовлетворительнымъ; и такъ какъ разсматриваемый вопросъ кажется ему полезнымъ и любопытнымъ и потому заслуживающимъ *доказательства во всей формѣ*, то онъ предлагаетъ свое доказательство, которое считаетъ самымъ общимъ и строгимъ. (*Histoire de l'astronomie au moyen âge*, p. 634). Но мы должны сказать, что доказательство Деламбра состоитъ почти изъ двухъ страницъ вычисленій и во всякомъ случаѣ не точнѣе краткаго разсужденія Де-Лагира.

Мы дѣлаемъ это замѣчаніе вовсе не съ намѣреніемъ критиковать; мы питаемъ уваженіе и удивленіе къ имени и трудамъ Деламбра, къ его преданности наукѣ и къ тѣмъ важнымъ и труднымъ изысканіямъ, которыя ему были необходимы, чтобы написать исторію астрономіи. Замѣчаніе это естественно проистекаетъ изъ главной идеи, лежащей въ основаніи нашего труда; оно показываетъ съ одной стороны ясный примѣръ тѣхъ преимуществъ, которыя иногда представляетъ путь геометрическій, или путь прямаго разсужденія, передъ вычисленіемъ; съ другой стороны, оно обнаруживаетъ направленіе, принятое математическими науками,—направленіе, при которомъ ясныхъ и убѣдительныхъ доказательствъ для истинъ геометрическихъ, *доказательствъ по формѣ*, ищутъ только въ повѣркѣ путемъ алгебраическаго исчисленія. Это направленіе противно всему, что дѣлалось до сихъ поръ: у Грековъ, гдѣ геометрія прославилась строгостію своихъ доказательствъ; у Индусовъ и Арабовъ, которые истолковывали результаты алгебры доказательствами геометрическими; у новыхъ геометровъ до послѣдняго вѣка, между которыми Ньютонъ и Маклоренъ употребляли анализъ весьма неохотно и только тамъ, гдѣ онъ неизбѣженъ.

Гдѣ причина такого исключительнаго направленія математическихъ знаній? И каково будетъ вліяніе его на характеръ и успѣхи науки?

Мы не будемъ пытаться отвѣчать на эти вопросы, такъ какъ многіе, вѣроятно, едва ли согласились бы съ нами. Но, каковы бы ни были мнѣнія объ этомъ предметѣ, нельзя по крайней мѣрѣ не согласиться съ тѣмъ, что было бы очень полезно поддерживать и разработывать на ряду съ новыми способами также и способъ древнихъ, которому математики продолжали слѣдовать до послѣдняго столѣтія.

Замѣчаніе это относится къ избытку данныхъ, которыя принимаетъ Де-Лагиръ при построеніи часовыхъ линій. Въ первомъ случаѣ онъ беретъ ихъ семь, во второмъ—четыре и еще равноденственную линію; въ третьемъ—три и кромѣ того равноденственную и горизантальную линіи; къ этому надобно прибавить, что данныя линіи предполагаются послѣдовательными.

Но необходимы ли всѣ эти данныя? И каково наименьшее число часовыхъ линій, достаточныхъ для построенія всѣхъ другихъ?

Отвѣчаемъ на это, что трехъ какихъ нибудь часовыхъ линій достаточно, чтобы опредѣлить всѣ остальныя, и построеніе можетъ быть сдѣлано также просто, какъ было сдѣлано Де-Лагиромъ въ случаѣ семи послѣдовательныхъ данныхъ часовыхъ линій.

Построеніе это представляетъ новое приложеніе *теоріи ангармоническаго отношенія*, на которую мы уже во многихъ мѣстахъ этого сочиненія старались обратить вниманіе геометровъ.

Означимъ черезъ a, b, c три данныя линіи, соотвѣтствующія какимъ нибудь опредѣленнымъ часамъ, или даже, если угодно, долямъ часа. Пусть d будетъ какая нибудь изъ часовыхъ линій, которую мы желаемъ построить при помощи трехъ первыхъ. *Ангармоническое* отношеніе этихъ четырехъ прямыхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ часовыхъ плоскостей, имѣющихъ эти прямыя слѣдами на плоскости солнечныхъ часовъ. Означая четыре плоскости эти черезъ A, B, C, D, получимъ:

$$\frac{\sin\ c,a}{\sin\ c,b} : \frac{\sin\ d,a}{\sin\ d,b} = \frac{\sin C,A}{\sin C,B} : \frac{\sin D,A}{\sin D,B}.$$

Углы между четырьмя плоскостями A, B, C, D извѣстны, такъ какъ эти плоскости соотвѣтсвуютъ четыремъ даннымъ часамъ; поэтому вторая часть уравненія есть извѣстное количество n.

Отсюда уже видно, что уравненіе наше можетъ служитъ для опредѣленія направленія линіи d, и слѣдовательно, для рѣшенія вопроса.

Чтобы вывести отсюда простое построеніе, проведемъ произвольную сѣкущую, которая встрѣтится съ тремя линіями a, b, c въ точкахъ α, β, γ, и означимъ черезъ δ точку пересѣченія ея съ искомою линіею d. Ангармоническое отношеніе для четырехъ точекъ α, β, γ, δ будетъ такое же, какъ и для четырехъ прямыхъ a, b, c, d; вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе обратится въ

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = n, \quad \text{откуда} \quad \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

Вторая часть извѣстна и, слѣдовательно, уравненіе опредѣляетъ положеніе точки δ, принадлежащей къ искомой линіи.

Это построеніе дѣлается въ высшей степени просто, если сѣкущую проведемъ параллельно одной изъ линій a, b, напримѣръ первой; потому что тогда $\frac{\delta\alpha}{\gamma\alpha} = 1$ и уравненіе принимаетъ видъ:

$$\delta\beta = n \,.\, \gamma\beta.$$

Отрѣзокъ $\gamma\beta$ извѣстенъ, а потому извѣстенъ также и отрѣзокъ $\delta\beta$; такимъ образомъ точка δ, а слѣдовательно и линія d, опредѣлены. Это общее построеніе какой угодно четвертой часовой линіи помощію трехъ какихъ нибудь данныхъ линій дѣйствительно, какъ мы уже говорили, столь же просто, какъ и построеніе Де-Лагира, въ которомъ считается необходимымъ знать семъ линій, вмѣсто трехъ.

Что касается до количества n, которое не дано прямо, но зависитъ отъ угловъ между четырьмя часовыми плоскостями A, B, C, D, то величину его легко найти графически, безъ помощи тригонометрическихъ линій, входящихъ въ его выраженіе. Для этого черезъ точку O проведемъ четыре прямыя OA', OB', OC', OD', образующія между собою углы, равные соотвѣтственно угламъ между часовыми плоскостями; проведемъ какую нибудь сѣкущую, которая пересѣчется съ этими прямыми въ точкахъ α', β', γ', δ'; ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ плоскостей и мы будемъ имѣть:

$$\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'} = n.$$

Такова величина n. Выраженіе ея можно упростить, проводя сѣкущую параллельно одной изъ четырехъ прямыхъ OA', OB', OC', OD', напримѣръ первой; тогда $\frac{\gamma'\alpha'}{\delta'\alpha'} = 1$ и мы получимъ:

$$n = \frac{\delta'\beta'}{\gamma'\beta'}.$$

23. Трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ имѣлъ большой успѣхъ во всей ученой Европѣ и, благодаря ему, на Де-Лагира смотрѣли, какъ на самостоятельнаго писателя объ этомъ предметѣ. Дѣйствительно, его методъ, хотя чисто синтетическій, отличался существенно отъ метода древнихъ. Древніе разсматривали коническія сѣченія на конусѣ, но

только для того, чтобы получить ихъ, вывести нѣкоторыя основныя свойства (изъ которыхъ самое важное есть постоянное отношеніе между квадратомъ ординаты и произведеніемъ отрѣзковъ на оси [31]) и потомъ пользоваться ими для изысканія и доказательства всѣхъ другихъ свойствъ: древніе составляли такимъ образомъ свою теорію коническихъ сѣченій, не зная ни одного свойства конуса и совершенно независимо отъ свойствъ круга, служащаго конусу основаніемъ; Аполлоній доказываетъ даже часто свойства круга въ одно время съ свойствами эллипса и одинаковымъ образомъ. Де-Лагиръ избралъ путь болѣе раціональный и методическій, и поэтому болѣе краткій и ясный. Онъ началъ съ установленія свойствъ круга, которыя должны представляться и въ коническихъ сѣченіяхъ, преимущественно свойствъ, относящихся къ гармоническому дѣленію; потомъ, пользуясь ими,

---

[31]) На вопросъ, отчего зависитъ плодотворность этого свойства коническихъ сѣченій, въ аналитической геометріи отвѣтили бы, что свойство это есть ничто иное, какъ *уравненіе* кривой, и неудивительно поэтому, что къ нему примѣняются удобно всѣ преобразованія, какимъ можно подвергнуть уравненіе. Но чистая геометрія требуетъ болѣе прямой причины, заимствованной только изъ свойствъ самаго предмета и не носящей отпечатка произвольной и искуственной системы координатъ; и легко видѣть, что причина заключается въ томъ, что свойство это выражаетъ соотношеніе между шестью точками коническаго сѣченія. Здѣсь впрочемъ шесть точекъ не имѣютъ положенія совершенно произвольнаго и общаго: четыре изъ нихъ берутся на двухъ параллельныхъ прямыхъ.

Но, не смотря на это ограниченіе, упомянутое соотношеніе достаточно для построенія кривой при помощи пяти произвольно данныхъ точекъ. Отсюда понятно, что оно можетъ вести ко всѣмъ свойствамъ коническихъ сѣченій. При этомъ пришлось бы только слѣдовать иногда не совершенно прямому пути и употреблять болѣе искуственныхъ оборотовъ, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда бы намъ было извѣстно совершенно общее соотношеніе между шестью какими нибудь точками коническаго сѣченія. Этимъ замѣчаніемъ объясняется, почему прекрасныя теоремы Дезарга и Паскаля, выражающія собою именно совершенно общее соотношеніе между шестью точками коническаго сѣченія, внесли въ теорію этихъ кривыхъ такую неизвѣстную древнимъ простоту.

онъ обнаружилъ и доказалъ подобныя же свойства въ сѣченіяхъ конуса. Этотъ пріемъ въ свое время былъ замѣчателенъ тѣмъ, что не требовалъ употребленія осеваго треугольника и прилагался безразлично ко всякимъ сѣченіямъ конуса.

Пріемъ этотъ, какъ мы видимъ, былъ въ духѣ способовъ Дезарга и Паскаля, которые переносили свойства круга на коническія сѣченія посредствомъ перспективы. Изъ *Brouillon projet des Coniques* Дезарга Де-Лагиръ могъ также заимствовать удачныя примѣненія гармонической пропорціи и нѣкоторыхъ инволюціонныхъ соотношеній. Вотъ двѣ причины, по которымъ мы разсматриваемъ этого геометра, какъ продолжателя ученій Дезарга и Паскаля.

24. Мы должны замѣтить, что новый способъ выводить свойства коническихъ сѣченій изъ свойства круга и изъ разсмотрѣнія конуса, на которомъ получаются эти кривыя, былъ уже употребляемъ двумя геометрами въ предшествующемъ столѣтіи. Во первыхъ Вернеромъ изъ Нюремберга, который этимъ путемъ доказалъ многія элементарныя свойства коническихъ сѣченій [32]); во вторыхъ въ болѣе обширномъ размѣрѣ и болѣе ученымъ образомъ, знаменитымъ Мавроликомъ изъ Мессины, который сперва перевелъ многія сочиненія древнихъ, а потомъ въ числѣ множества собственныхъ сочиненій издалъ *Traité des Coniques;* въ этомъ послѣднемъ сочиненіи онъ слѣдовалъ новому пути, приписывая пріемамъ древнихъ при изслѣдованіяхъ этого рода растянутость ихъ доказательствъ [33]).

По поводу того же предмета справедливо упомянуть еще о Гуарини, современникѣ Де-Лагира, который въ 1671 году

---

[32]) *J. Verneri Libellus super vigintiduobus elementis conicis, etc.* in. 4°, 1522.

[33]) *Quoniam Apollonius omnia fere conicorum demonstrata conatus est in planum redigere, antiquioribus insignior; neglecta conorum descriptione, et aliunde quaerens argumenta, cogitur persaepe obscurius ei indirecte demonstrare id, quod contemplando solidae figurae sectionem, apertius et brevius demonstratur.* D. Francisci Maurolici Opuscula mathematica. In-4°; Venetiis, 1575; p. 280).

издалъ также *Трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ*, гдѣ часто пользовался свойствами конуса для доказательства свойствъ его сѣченій.

Въ этомъ сочиненіи особенно замѣчательно чрезвычайно простое и прилагающееся ко всѣмъ видамъ коническихъ сѣченій доказательство теоремы о постоянномъ отношеніи между произведеніями отрѣзковъ на параллельныхъ хордахъ,— теоремы, которая требовала всегда многихъ предварительныхъ предложеній. Пріемъ доказательства представлялъ шагъ впередъ въ теоріи коническихъ сѣченій, но Гуарини, хотя въ высшей степени былъ свѣдущъ во всѣхъ отдѣлахъ геометріи, не развилъ его такъ систематически и съ такимъ талантомъ, какъ Де-Лагиръ. (См. о Мавроликѣ и Гуарини въ Примѣчаніи XVII).

25. Скажемъ здѣсь мимоходомъ, что кромѣ способа древнихъ и способа, избраннаго Де-Лагиромъ, можно представить себѣ еще третій способъ, который до сихъ поръ никѣмъ еще не употреблялся, но который могъ бы, если не ошибаемся, до высшей степени упростить доказательства и обнаружить самымъ яснымъ образомъ основныя начала и происхожденіе разнообразныхъ свойствъ коническихъ сѣченій. Надобно сознаться, что въ этомъ отношеніи способъ древнихъ оставляетъ насъ въ совершенномъ мракѣ.

Способъ, о которомъ мы говоримъ, могъ бы состоять въ изученіи свойствъ самаго конуса и въ выраженіи ихъ совершенно независимо отъ свойствъ его сѣченій; тогда послѣднія свойства выводились бы изъ первыхъ съ необыкновенною легкостію и общностію. Это понятно уже изъ того, что вездѣ, гдѣ древніе, основываясь на особенностяхъ трехъ видовъ коническихъ сѣченій, должны были употреблять три различныя доказательства для обнаруженія одного и того же свойства въ эллипсѣ, параболѣ и гиперболѣ, здѣсь было бы достаточно вывести соотвѣтствующее свойство самаго конуса и отсюда, какъ изъ настоящаго общаго источника, проистекали бы тогда свойства всѣхъ сѣченій конуса.

Такимъ путемъ объяснилось бы на конусѣ происхожденіе многихъ свойствъ въ коническихъ сѣченіяхъ; таковы напримѣръ свойства *фокусовъ*, которыя, кажется, были угаданы Аполлоніемъ и которыя ни этимъ геометромъ, ни однимъ изъ слѣдующихъ, не были поставлены въ связь съ свойствами круга, или конуса; такъ что первоначальное происхожденіе этихъ замѣчательныхъ точекъ, въ зависимости отъ конуса, на которомъ получаются кривыя, оставалось совершенно неизвѣстнымъ.

Другая выгода указываемаго нами способа состояла бы въ томъ, что вмѣстѣ съ теоріей коническихъ сѣченій образовалась бы теорія круглыхъ конусовъ, свойства которыхъ до сихъ поръ еще весьма мало извѣстны. Это не представило бы никакихъ затрудненій: въ доказательство мы можемъ, кажется, привести опытъ, сдѣланный нами въ одномъ мемуарѣ [34]), гдѣ, допуская только нѣкоторыя большею частію очевидныя свойства круга, мы получили множество новыхъ свойствъ конусовъ втораго порядка; нѣкоторыя изъ этихъ свойствъ соотвѣтствуютъ свойствамъ фокусовъ коническихъ сѣченій и приводятъ къ нимъ; такимъ образомъ существованіе и свойства фокусовъ могутъ быть приведены въ зависимость отъ свойствъ конуса.

Читая первыя строки *Трактата о коническихъ сѣченіяхъ* Валлиса, можно подумать, что этотъ великій геометръ слѣдуетъ именно тому способу, о которомъ мы теперь говоримъ. Онъ объявляетъ, что, убѣдившись въ трудности теоріи коническихъ сѣченій и желая ее упростить, онъ приступитъ сначала къ ближайшему изученію самаго конуса, чего не сдѣлали древніе, а отсюда уже, какъ изъ настоящаго источника, выведетъ свойства этихъ кривыхъ. Но Валлисъ спѣшитъ прибавить, что онъ ограничивается только важнѣйшими свойствами, которыя могутъ вести къ открытію всѣхъ другихъ. И въ самомъ дѣлѣ, доказавъ, также какъ

---

[34]) *Mémoire de Géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré.* In—4°, 1830.

Декартъ, свойство, служащее для выраженія кривыхъ помощію двухъ координатъ, онъ избираетъ другой путь и даетъ аналитическую теорію этихъ кривыхъ.

26. Возвратимся къ трактату Де-Лагира. Это сочиненіе раздѣлено на девять книгъ. Первая представляетъ основу для всего послѣдующаго; въ ней послѣдовательно излагаются свойства гармоническаго дѣленія прямой линіи, свойства гармоническихъ пучковъ, и наконецъ гармоническія соотношенія въ кругѣ. Тутъ же находятся нѣкоторые частные случаи инволюціоннаго соотношенія шести точекъ, но нѣтъ подобнаго соотношенія въ совершенно общемъ видѣ. Эта книга представляетъ введеніе, изъ котораго впослѣдствіи почерпаются простыя и общія доказательства теоремъ, требовавшихъ у древнихъ долгихъ и трудныхъ соображеній. Именно въ этомъ состояла новизна и заслуга метода Де-Лагира.

Кромѣ задачи *ad tres et quatuor lineas* и прекрасныхъ общихъ теоремъ, составлявшихъ основаніе сочиненій Дезарга и Паскаля, въ трактатѣ Де-Лагира соединены были въ первый разъ всѣ другія извѣстныя свойства коническихъ сѣченій и доказаны синтетически однообразнымъ и изящнымъ пріемомъ. Многія изъ предложеній принадлежатъ самому Де-Лагиру. Изъ нихъ прежде всего укажемъ на теорію *полюсовъ*, состоящую изъ слѣдующихъ трехъ теоремъ.

1°. „Если около неподвижной точки будемъ обращать сѣ„кущую, встрѣчающуюся съ коническимъ сѣченіемъ въ двухъ „точкахъ, то касательныя въ этихъ точкахъ всегда будутъ „пересѣкаться на одной прямой“. (Предложенія 27 и 28 книги 1-й; 24 и 27 книги 2-й).

И обратно: „Если изъ каждой точки прямой линіи будемъ „проводить двѣ касательныя къ коническому сѣченію, то „прямыя, соединяющія точки прикосновенія, пройдутъ че„резъ одну точку“. (Предложенія 26 и 28 книги 1-й; 23 и 26 книги 2-й).

Точка эта въ послѣднее время названа была *полюсомъ* прямой, а прямая — *полярою* точки.

2°. „Если черезъ неподвижную точку будемъ проводить „различныя сѣкущія, пересѣкающія коническое сѣченіе, то „прямыя соединяющія попарно точки пересѣченія двухъ ка„кихъ-нибудь сѣкущихъ, будутъ между собою пересѣкаться „на *полярѣ* неподвижной точки". (Предложеніе 22 и 23 кн. 1-й; 30 кн. 2-й).

3°. Наконецъ „Точка встрѣчи каждой сѣкущей съ поля„рою неподвижной точки есть гармонически сопряженная „съ этою неподвижной точкой относительно двухъ точекъ „пересѣченія сѣкущей съ кривою". (Предл. 21 кн. 1-й и 23 и 26 кн. 2-й).

Послѣднее предложеніе было извѣстно Аполлонію.

Въ трактатѣ Де-Лагира оно есть основное и изъ него выводятся всѣ другія. Изъ предложенія 3-го книги 3-й видно, напримѣръ, какъ естественно приводитъ оно къ соотношенію между квадратомъ ординаты и прямоугольникомъ изъ отрѣзковъ оси.

Такимъ образомъ предложеніе это играетъ въ обширномъ трактатѣ Де-Лагира ту же роль, какъ теорема о *latus rectum* у Аполлонія, какъ инволюція шести точекъ въ *Brouillon projet des Coniques* Дезарга и какъ мистическій шестиугольникъ вь сочиненіи Паскаля.

Легко видѣть, что изъ трехъ упомянутыхъ нами здѣсь предложеній два первыя заключаются въ теоремѣ о четыреугольникѣ, вписанномъ въ коническое сѣченіе,—теоремѣ, которую, какъ мы уже говорили, Паскаль вѣроятно вывелъ изъ своего шестиугольника; третье же предложеніе есть слѣдствіе той же теоремы на основаніи 131 предложенія 7-й книги *Математическаго Собранія*, — предложенія, которое мы указали, говоря о Паппѣ.

Но такъ какъ сочиненіе Паскаля никогда не было издано, то Де-Лагиру принадлежитъ честь открытія этихъ прекрасныхъ предложеній. Впослѣдствіи они были воспроизведены Маклореномъ въ сочиненіяхъ *о флюксіяхъ* и *о геометрическихъ кривыхъ*, Р. Симсономъ въ сочиненіи *о коническихъ*

сѣченіяхъ, Карно въ *Théorie des transversales* и многими другими геометрами.

Первая теорема и ея взаимная были доказаны посредствомъ нагляднаго и весьма изящнаго пріема въ Начертательной Геометріи Монжа и распространены этимъ знаменитымъ геометромъ на поверхности втораго порядка. Съ этого времени получаетъ важность и обширное примѣненіе теорія полюсовъ, заключавшаяся до этихъ поръ въ названныхъ нами ученыхъ сочиненіяхъ, но остававшаяся почти неизвѣстною для молодыхъ геометровъ, изучавшихъ коническія сѣченія только по способу аналитическій геометріи.

Между другими замѣчательными свойствами коническихъ сѣченій, открытыми Де-Лагиромъ, мы упомянемъ только о геометрическомъ мѣстѣ вершины прямаго угла, описаннаго около коническаго сѣченія; это геометрическое мѣсто есть кругъ для эллипса и гиперболы и прямая линія для параболы (8-я книга, предл. 26, 27 и 28) [35]); Монжъ обобщилъ также и это предложеніе и показалъ, что точка пересѣченія трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, касающихся поверхности втораго порядка, лежитъ всегда на сферѣ, которая обращается въ плоскость для параболоида.

---

[35]) Де-Лагиръ показалъ также (*Mémoires de l'Académie de Sciences*, 1704) геометрическое мѣсто равныхъ между собою, острыхъ или тупыхъ, угловъ, описанныхъ около коническаго сѣченія; это есть кривая четвертаго порядка, обращающаяся въ гиперболу, когда данное коническое сѣченіе есть парабола.

Въ томъ же мемуарѣ Де-Лагиръ изслѣдуетъ этотъ вопросъ также для циклоиды и приходитъ къ слѣдующему любопытному результату: вершины равныхъ угловъ, прямыхъ, острыхъ, или тупыхъ, описанныхъ около этой кривой лежатъ на другой циклоидѣ, сжатой или растянутой.

Мы нашли, что круговыя эпициклоиды обладаютъ тѣмъ же свойствомъ, именно:

Если около эпициклоиды, образуемой точкою окружности круга, катящагося по другому кругу, будемъ описывать равные между собою углы, то вершины ихъ будутъ лежать на растянутой, или сжатой, эпициклоидѣ.

Де-Лагиръ значительно обогатилъ также теорію *фокусовъ* и показалъ изящное и простое построеніе, посредствомъ прямой *линіи* и круга, коническаго сѣченія, имѣющаго данный фокусъ и проходящаго черезъ три данныя точки. Задача эта имѣетъ приложеніе въ астрономіи и для рѣшенія ея знаменитый астрономъ и геометръ Галлей, разрѣшившій ее въ первый разъ, употреблялъ гиперболу [36]).

27. До Декарта существовалъ только одинъ способъ образованія коническихъ сѣченій, именно на тѣлѣ, т.-е. на конусѣ съ круглымъ основаніемъ. Но геометрія этого знаменитаго преобразователя произвела въ теоріи этихъ кривыхъ, также какъ и во всѣхъ другихъ частяхъ математики, рѣшительный переворотъ: она научила получать ихъ прямо на плоскости, не пользуясь при этомъ нисколько разсмотрѣніемъ конуса. Декарту было достаточно замѣтить, что въ его системѣ координатъ всѣ коническія сѣченія выражаются общимъ уравненіемъ второй степени. Такое аналитическое выраженіе вело къ изысканію и развитію ихъ многочисленныхъ свойствъ. Этотъ способъ изслѣдованія былъ принятъ прежде всего Валлисомъ, который первый далъ аналитическую теорію коническихъ сѣченій, а потомъ большинствомъ геометровъ, писавшихъ объ этихъ кривыхъ. Впрочемъ еще впродолженіе цѣлаго столѣтія продолжали разсматривать коническія сѣченія также и на конусѣ и въ сочиненіяхъ, появившихся втеченіе этого времени, соединяли вмѣстѣ оба способа: способъ древнихъ и способъ Декарта.

Пріемъ, служившій Дезаргу и Паскалю для образованія коническихъ сѣченій, относился къ способу древнихъ, потому что въ немъ эти кривыя разсматриваются какъ перспективы круга. Но этотъ пріемъ получилъ весьма важное преимущество, благодаря употребленію теоріи трансверсалей, которою древніе пользовались только въ системахъ пря-

---

[36]) *Methodus directa et geometrica cujus ope investigantur Aphelia etc. Planetarum.* Philosophical Transactions, 1676, n⁰ 128.

мыхъ линій, но не прилагали ни къ кругу, ни къ коническимъ сѣченіямъ.

Григорій С. Винцентъ, какъ мы уже говорили, придумалъ множество способовъ образовать коническія сѣченія одни помощію другихъ; Шутенъ далъ нѣсколько способовъ органическаго образованія ихъ; Де-Виттъ сдѣлалъ еще шагъ, образуя эти кривыя различными весьма общими способами, которыми онъ искусно пользовался для вывода ихъ важнѣйшихъ свойствъ; но всѣ эти способы не были одинаковы для всѣхъ трехъ видовъ коническихъ сѣченій.

Де-Лагиръ, имѣя передъ глазами совершенно общій, но аналитическій, способъ Декарта и попытки Де-Витта, старался также найти общій пріемъ для образованія коническихъ сѣченій на плоскости, который могъ бы вести, также какъ и въ случаѣ образованія ихъ на конусѣ, къ доказательству свойствъ этихъ кривыхъ.

28. Въ 1673 и 1679 годахъ онъ двоякимъ образомъ выполнилъ это намѣреніе въ двухъ сочиненіяхъ, которыя предшествовали его большому трактату 1685 года и съ которыхъ началась его извѣстность, какъ геометра.

Въ сочиненіи 1679 года [37]) Де-Лагиръ опредѣляетъ коническія сѣченія, какъ такія кривыя, въ которыхъ сумма или разность разстояній каждой точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ остается постоянная или каждая точка находится въ одинаковомъ разстояніи отъ данной точки и данной прямой. Исходя изъ одного этого положенія, онъ выводитъ множество свойствъ этихъ кривыхъ.

Такая постановка теоріи коническихъ сѣченій была принята многими геометрами, которые положили ее въ основаніе своихъ сочиненій; таковы маркизъ Lhopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit и др.

Въ сочиненіи своемъ Де-Лагиръ присоединилъ къ этому еще двѣ особыя части о геометрическихъ мѣстахъ, изслѣ-

---

[37]) *Nouveaux élémens des sections coniques. Les lieux géométriques. La construction ou effection des équations.* (In—12; 1679).

дованныхъ по способу Декарта, и о примѣненіи ихъ къ построенію уравненій.

Послѣдняя часть оканчивается построеніемъ посредствомъ прямой линіи и круга одной изъ самыхъ знаменитыхъ задачъ въ теоріи коническихъ сѣченій, именно задачи о проведеніи нормали черезъ точку, взятую внѣ кривой. Андерсонъ [38]), Слюзъ и Гюйгенсъ рѣшили эту задачу только для параболы; это не представляло большой трудности, потому что задача допускаетъ въ этомъ случаѣ только три рѣшенія и потому можетъ быть рѣшена при помощи одного круга. Но въ случаѣ эллипса и гиперболы задача, допуская четыре рѣшенія, представляетъ большія затрудненія и достаточно доказываетъ искуство Де-Лагира въ Декартовомъ анализѣ.

29. Въ сочиненіи 1673 года подъ заглавіемъ: *Nouvelle méthode en Géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, Де-Лагиръ является писателемъ вполнѣ оригинальнымъ и новымъ, и оно-то заставляетъ насъ включить этого геометра въ число основателей новой геометріи.

Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ каждая представляетъ особый новый методъ и особыя достоинства. Приведенное нами выше заглавіе относится преимущественно къ первой части, въ которой авторъ разсматриваетъ кривыя на конусѣ; вторая же часть, гдѣ онъ образуетъ ихъ на плоскости, носитъ названіе *Planiconiques*.

Первую часть можно разсматривать, какъ опытъ того способа, которому Де-Лагиръ, спустя двѣнадцать лѣтъ, слѣдовалъ въ своемъ большомъ трактатѣ; дѣйствительно эта часть начинается двадцатью леммами, относящимися къ тѣмъ же предметамъ какъ и 1-я книга трактата; потомъ де-Лагиръ прилагаетъ ихъ къ доказательству важнѣйшихъ свойствъ коническихъ сѣченій, съ общностію для того времени новою и безъ помощи осеваго треугольника. Но доказательства эти

---

[38]) *A. Andersoni Exercitationum mathematicarum Decas prima, etc.* Paris. 1619, in—4°.

далеко еще не представляютъ той степени изящества и простоты, какъ въ трактатѣ 1685 года.

Въ *Planiconiques* Де-Лагиръ излагаетъ изобрѣтенный имъ общій способъ образованія коническихъ сѣченій на плоскости; здѣсь кривыя, какъ и въ пространствѣ, образуются при помощи круга и при этомъ не предполагаются извѣстными никакія свойства ихъ; впослѣдствіи Де-Лагиръ доказываетъ, что образуемыя такимъ образомъ кривыя дѣйствительно одинаковы съ тѣми, которыя получаются въ пространствѣ на конусѣ. Особенно хорошо въ этомъ способѣ то, что свойства круга распространяются на *planiconiques* при помощи тѣхъ же леммъ, которыя служатъ для распространенія свойствъ кругъ на сѣченія конуса, и доказательства при этомъ остаются тѣже, какъ въ первой части.

30. Такъ какъ это первое сочиненіе Де-Лагира чрезвычайно рѣдко и такъ какъ писатели, иногда упоминавшіе объ немъ, не достаточно знакомятъ съ его направленіемъ [39]), то мы считаемъ не лишнимъ войти здѣсь въ нѣкоторыя подробности объ этой удивительной теоріи *planiconiques*, которая такъ долго оставалась неизвѣстною и забытою, но ко-

---

[39]) Въ *Philosophical Transactions* 1676, n⁰ 129, помѣщенъ благопріятный отзывъ о сочиненіи Де-Лагира, но ничего не говорится о его *Planiconiques*.

Въ *Journal des Savans* (1676, 17 Décembre) послѣ разбора первой части сочиненія сказаны о *planiconiques* только слѣдующія слова, которыхъ было бы достаточно, чтобы предохранить эту теорію отъ забвенія: „Авторъ прибавилъ къ своему новому методу трактатъ о planiconiques, который чрезвычайно хорошъ и очень удобенъ, такъ какъ въ немъ нѣтъ надобности воображать ни какого-нибудь тѣла, ни плоскости, кромѣ той, на которой разсматривается фигура".

Вольфъ въ своемъ *комментаріи къ важнѣйшимъ сочиненіямъ геометровъ* приводитъ всѣ другія сочиненія Де-Лагира, но совершенно опускаетъ то, о которомъ мы говоримъ. Монтукла не говоритъ о немъ ни слова. Впрочемъ Cornelius à Beughem упомянулъ о немъ въ *Bibliographica mathematica* и потомъ Murrhard также записалъ его въ *Bibliotheca mathematica*.

торая представляетъ первый довольно общій способъ *преобразованія фигуръ въ другія такого же рода.*

Представимъ себѣ на плоскости двѣ параллельныя между собою прямыя, изъ которыхъ одну авторъ называетъ *образующей* (*formatrice*), другую — *направляющей* (*directrice*), и кромѣ того точку, называемую *полюсомъ*. Изъ каждой точки *M* кривой, данной на плоскости, проводимъ по произвольному направленію сѣкущую; она встрѣтится съ направляющею въ точкѣ, которую соединяемъ прямою линіею съ полюсомъ, и съ образующей—въ другой точкѣ, изъ которой проводимъ параллельную къ предыдущей прямой. Эта параллельная встрѣтится съ прямою, идущею отъ точки *M* къ полюсу, въ точкѣ *M'*, которая такимъ образомъ *образована* точкою *M*.

Каждая точка данной кривой образуетъ подобнымъ же образомъ соотвѣтственную точку второй кривой.

Точки прямой линіи образуютъ точки другой прямой линіи, обѣ эти линіи пересѣкаются на *образующей.*

Наконецъ, *точки круга образуютъ точки коническаго сѣченія.*

Чтобы доказать это предложеніе, не предполагая извѣстнымъ никакого свойства коническихъ сѣченій, Де-Лагиръ представляетъ себѣ конусъ съ круговымъ основаніемъ и на немъ плоское сѣченіе; затѣмъ онъ совмѣщаетъ плоскость круга съ плоскостію сѣченія, обращая ее около линіи пересѣченія этихъ плоскостей; потомъ, принявъ эту линію за *образующую*, другую (именно линію, которая въ первоначальномъ положеніи плоскости круга есть пересѣченіе съ плоскостію, проведенною черезъ вершину конуса параллельно плоскости коническаго сѣченія)—за *направляющую* и извѣстнымъ образомъ избранную точку за *полюсъ*, онъ доказываетъ, чрезъ сравненіе подобныхъ треугольниковъ, что это сѣченіе можетъ быть *образовано* кругомъ [40]).

---

[40]) Это доказательство довольно трудно; начало перспективы, которое мы вывели изъ теоремы Дезарга, доставляетъ доказательство самое естественное и въ въ высшей степени простое.

Таковъ былъ способъ Де-Лагира для полученія коническихъ сѣченій на плоскости безъ помощи всякаго тѣла и всякой другой плоскости, кромѣ плоскости чертежа. Это онъ называлъ *перевести конусъ и его сѣченія на плоскость.* Въ предисловіи къ сочиненію 1679 года онъ говоритъ: *я прилагалъ къ этимъ плоскимъ сѣченіямъ тѣ же доказательства, какія даны мною для тѣла, и могу сказать, что сочиненіе моё имѣло счастіе заслужить одобреніе самыхъ ученыхъ геометровъ.*

Но извѣстность этого сочиненія продолжалось недолго и оно, не смотря на свои несомнѣнныя достоинства, болѣе вѣка оставалось въ забвеніи; это могло бы удивить насъ, если бы мы не знали, что у всякой эпохи есть свои вопросы дня и что самыя лучшія и полезныя идеи, чтобы быть признанными, должны появляться въ такое время, когда умы обращены къ предметамъ съ ними сроднымъ. Исторія наукъ на всякомъ шагу даетъ намъ доказательства этой истины [41]).

31. **Ле-Пуавръ.** Впрочемъ способъ Де-Лагира былъ въ 1704 году воспроизведенъ, или лучше сказать изобрѣтенъ вновь, Ле-Пуавромъ (Le Poivre de Mons), геометромъ въ наше время неизвѣстнымъ, но о которомъ было бы несправедливо не упомянуть вмѣстѣ съ Декартомъ, Паскалемъ и Де-Лагиромъ въ исторіи происхожденія и развитія новой геометріи. Сочиненіе его носило такое заглавіе: *Traité des sections du cylindre et du cône, considérés dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles* (60 страницъ in 8°). Часть, относящаяся къ образованію коническихъ сѣченій на плоскости, есть въ сущности ничто иное, какъ методъ Де-Лагира, но онъ представленъ здѣсь

---

41) Вмѣстѣ съ Монтуклой мы могли бы прибавить, что „предразсудки бываютъ даже въ геометріи, и рѣдко люди, привыкшіе долгое время къ разсужденіямъ извѣстнаго рода, бываютъ расположены оставить старыя привычки и усвоить себѣ новыя сужденія". (*Histoire des mathématiques*, t. II, p. 144.)

совершенно въ другомъ видѣ и заслуживаетъ, чтобы мы изложили его особенности и пріемы [42]).

Первоначальная мысль автора состояла, кажется, въ томъ, чтобы провести на конусѣ кривую плоскаго сѣченія, не проводя самой плоскости; и авторъ дѣлаетъ это двумя способами: посредствомъ пересѣченія каждой образующей конуса съ другою извѣстнымъ образомъ проведенною прямою и посредствомъ пропорціи, послѣдній членъ которой служитъ для опредѣленія на каждой образующей точки кривой сѣченія. Потомъ онъ замѣчаетъ, что эти построенія могутъ быть выполнены не только въ пространствѣ, но и на самой плоскости круга, служащаго основаніемъ конуса, и что они ведутъ въ этомъ случаѣ къ тѣмъ же самымъ кривымъ.

Представимъ себѣ конусъ съ круглымъ основаніемъ; произвольно проведенная плоскость образуетъ на немъ коническое сѣченіе; требуется построить эту кривую безъ помощи плоскости, въ которой она находится. Для этого нужно прежде всего взять въ пространствѣ элементы, необходимые для опредѣленія положенія этой плоскости; это можно сдѣлать различнымъ образомъ. Ле-Пуавръ беретъ слѣдъ сѣ-

---

[42]) Отзывы объ этомъ сочиненіи были помѣщены въ *Journal des Savans* 1704 и въ *Acta eruditorum* 1707 года.

Въ довольно обширной статьѣ *Journal des Savans* предполагается кажется, что способъ Ле-Пуавра заимствованъ у Де-Лагира. Но мы не можемъ согласиться съ этимъ мнѣніемъ, потому что пути изобрѣтенія слишкомъ различны въ этихъ двухъ способахъ. Прибавимъ къ этому, что сочиненіе Ле-Пуавра содержитъ еще открытіе, котораго нѣтъ въ сочиненіи Де-Лагира и которое не было замѣчено авторомъ статьи *Journal des Savans;* тамъ находимъ именно другой способъ образованія этихъ фигуръ, основанный на ихъ метрическихъ соотношеніяхъ; способъ этотъ могъ бы повести Ле-Пуавра къ весьма важнымъ слѣдствіямъ, если бы авторъ развилъ далѣе свою счастливую мысль.

Лейпцигскій журналъ отзывается очень благосклонно о сочиненіи Ле-Пуавра; тамъ говорится: «*Non solum intra paucas pagellas palmarias sectionum conicarum proprietates mira facilitate ac perspicuitate explicat; sed inter eas quoque aliquot proponit antea parum cognitas*».

кущей плоскости на плоскости основанія конуса и другую прямую, параллельную этому слѣду и получаемую отъ пересѣченія плоскости основанія съ плоскостію, проходящею черезъ вершину конуса и параллельною плоскости сѣченія. Эти двѣ прямыя и вершина конуса вполнѣ опредѣляютъ положеніе плоскости сѣченія и потому онѣ должны быть тремя данными, достаточными также и для построенія кривой пересѣченія конуса съ плоскостью, если только такая кривая дѣйствительно существуетъ.

Но легко видѣть, что это построеніе будетъ выполнено слѣдующимъ образомъ: черезъ точку M круга основанія, называемаго *образующимъ кругомъ* (*cercle générateur*), проведемъ какую-нибудь сѣкущую, которая встрѣтится со *слѣдомъ* плоскости сѣченія и съ линіею ему параллельной въ двухъ точкахъ; соединимъ вторую точку съ вершиною S конуса прямою линіею и къ этой прямой проведемъ параллельную черезъ первую точку. Эта параллельная очевидно будетъ лежать въ плоскости сѣченія и встрѣтится съ образующей SM конуса въ точкѣ M', принадлежащей искомой кривой. Для всякой другой точки *образующаго круга* получимъ другую точку кривой сѣченія.

Это построеніе совершенно общее; оно существуетъ, каково бы ни было положеніе точки S въ пространствѣ; оно примѣнимо и къ тому случаю, когда эта точка находится въ плоскости круга, когда слѣдовательно нѣтъ болѣе конуса. Кривая, образуемая точкой, и въ этомъ случаѣ будетъ коническое сѣченіе [43])

---

[43]) Чтобы убѣдиться въ этомъ, проложимъ кривую, которую мы построили въ пространствѣ, на плоскость круга со всѣми линіями, служившими для построенія. Въ проложеніи получимъ кривую и прямыя, служащія именно для ея построенія, точно также какъ прямыя въ пространствѣ служили для построенія сѣченія конуса; другими словами, построеніе кривой въ проложеніи будетъ совершенно сходно съ построеніемъ кривой въ пространствѣ; если при этомъ возьмемъ проэктирующія линіи перпендикулярныя, къ слѣду плоскости сѣченія на плоскости основанія и одинаково наклоненныя къ этимъ двумъ плоско-

Такимъ образомъ построеніе Ле-Пуавра прилагается къ образованію коническихъ сѣченій какъ въ плоскости, такъ и въ пространствѣ. Въ случаѣ плоскости это построеніе, какъ мы видимъ, одинаково съ построеніемъ Де-Лагира. Точка S есть *полюсъ*, слѣдъ сѣкущей плоскости—*образующая*, а линія параллельная ему—*направляющая*.

32. Вообще въ геометріи есть два способа примѣнять къ дѣлу рѣшенія, полученныя теоретическимъ путемъ. Первый способъ состоитъ въ томъ, что искомыя точки строятся посредствомъ пересѣченія линій; второй — въ томъ, что эти точки опредѣляются помощію формулъ, которыя путемъ вычисленія приводятъ къ числовымъ результатамъ. Всегда полезно искать рѣшеніе въ этихъ обоихъ видахъ, потому что каждый изъ нихъ знакомитъ съ свойствами фигуръ, которыя не указываются другимъ; вопросъ только тогда рѣшенъ окончательно, когда онъ изслѣдованъ со всѣхъ сторонъ, когда открыты и обнаружены всѣ, какъ графическія, такъ и метрическія свойства, выраженныя указанными нами двумя видами рѣшенія.

Изложенное нами построеніе коническаго сѣченія въ пространствѣ или на плоскости, принадлежитъ къ первому роду рѣшеній. Чтобы превратить его въ числовую форму, сравнимъ два подобные треугольника, имѣющіе общую вершину въ S; отсюда получимъ пропорцію между сторонами ихъ, прилежащими къ этой вершинѣ. Изъ этой пропорціи найдется разстояніе точки M' коническаго сѣченія отъ соотвѣтствующей точки круга; это и будетъ искомая формула [44]).

стямъ, то въ проложеніи получится кривая совершенно одинаковая съ кривой сѣченія; слѣдовательно это будетъ коническое сѣченіе.

Отсюда же видно, что при распространеніи на коническія сѣченія свойствъ круга нужны одни и тѣ же доказательства, будемъ ли мы разсматривать коническое сѣченіе въ плоскости круга, или въ пространствѣ.

[44]) За неизвѣстное лучше принять разстояніе точки M' отъ S; въ этомъ случаѣ формула естественнымъ образомъ ведетъ къ различнымъ свойствамъ коническихъ сѣченій, между прочимъ къ свойствамъ фоку-

33. Нельзя себѣ представить способа, который былъ бы богаче и удобнѣе способа Де-Лагира и Ле-Пуавра для открытія многочисленныхъ свойствъ коническихъ сѣченій при помощи круга; но выгоды этого способа не должны были ограничиваться только этимъ частнымъ примѣненіемъ; способъ этотъ имѣлъ лучшую участь впослѣдствіи, такъ какъ въ немъ, также какъ въ способѣ перспективы, заключалось общее средство для *преобразованія* на плоскости однихъ фигуръ въ другія того же рода.

Важность подобныхъ способовъ, составляющихъ одинъ изъ главныхъ отдѣловъ новой геометріи, заставляетъ насъ высказать еще нѣсколько соображеній о способѣ Де-Лагира и Ле-Пуавра, чтобы показать соотношеніе его съ пріемами перспективы, съ подобнымъ же пріемомъ, изобрѣтеннымъ почти въ то же время Ньютономъ, и съ многими другими способами болѣе поздняго происхожденія, о которыхъ мы будемъ говорить впослѣдствіи.

Въ способѣ, который употребляли Де-Лагиръ и Ле-Пуавръ для преобразованія круга въ коническое сѣченіе на плоскости, обнаруживается слѣдующее отличительное свойство: всякой точкѣ и прямой, относящимся къ образующему кругу, соотвѣтствуетъ точка и прямая относительно коническаго сѣченія; и соотношенія между положеніями этихъ фигуръ таковы, что двѣ *соотвѣтственныя* точки лежатъ всегда на прямой, проходящей чрезъ постоянную точку S, и

совъ, о которыхъ авторъ не говоритъ ничего. Для этого достаточно помѣстить точку S въ центръ образующаго круга.

Послѣднее замѣчаніе касательно положенія точки S относится также и къ *Трактату* Де-Лагира, въ которомъ онъ доказываетъ свойства фокусовъ, но не приходитъ къ этимъ точкамъ путемъ открытія, а предполагаетъ ихъ извѣстными *a priori*, такъ какже и Аполлоній въ «коническихъ сѣченіяхъ». Помѣщая *полюсъ* въ центрѣ круга, но при какомъ угодно положеніи *образующей* и *направляющей* (лишь бы онѣ были параллельны между собою), мы получаемъ коническое сѣченіе, для котораго полюсъ служитъ фокусомъ: при этомъ различныя свойства круга непосредственно приводятъ къ свойствамъ фокусовъ коническаго сѣченія.

двѣ *соотвѣтственныя* прямыя пересѣкаются всегда на постоянной оси, именно на прямой, которую мы назвали *образующей* въ способѣ Де-Лагира и разсматривали какъ слѣдъ плоскости сѣченія въ способѣ Ле-Пуавра.

Эти постоянныя точка S и ось, если ихъ разсматривать какъ принадлежащія къ кругу, соотвѣтствуютъ сами себѣ относительно коническаго сѣченія; такъ что онѣ играютъ одинаковую роль относительно той и другой кривой.

Если изъ этой постоянной точки можно провести къ кругу двѣ касательныя, то онѣ будутъ также касательными и къ коническому сѣченію; если постоянная ось пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ, то черезъ эти же точки пройдетъ и коническое сѣченіе.

Можно доказать также, что, если двѣ прямыя параллельны, то соотвѣтственныя ихъ пересѣкаются въ точкѣ прямой, которую мы назвали *направляющей*; такъ что каждой безконечно удаленной точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ на другой точка *направляющей*. Но такъ какъ прямой линіи можетъ соотвѣтствовать только прямая же линія, то мы заключаемъ, что всѣ безконечно удаленныя точки плоскости должно разсматривать, какъ расположенныя на одной прямой.

34. По всѣмъ этимъ свойствамъ мы узнаемъ *гомологическія* фигуры, теорія которыхъ дана была въ первый разъ Понселе въ *Traité des propriétés projectives*. Полюсъ S есть *центръ гомологіи*, а образующая—*ось гомологіи*.

Лица, привыкшія къ приложеніямъ перспективы, узнаютъ также въ этомъ преобразованіи тѣ самыя фигуры, которыя чертятся на плоскости и должны быть одна перспективою другой.

Такимъ образомъ, если будемъ разсматривать *образующую* (или *ось гомологіи*) какъ *общій прорѣзъ*, *направляющую* какъ *линію горизонтальную*, основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ *полюса* (или *центра гомологіи*) на направляющую—какъ *точку зрѣнія*; если потомъ для полученія *точки разстояній* отложимъ на направляющей, начиная отъ точки

зрѣнія, отрѣзокъ равный вышеупомянутому перпендикуляру, и если по этимъ даннымъ построимъ перспективу коническаго сѣченія, получаемаго по способу Де-Лагира, то получимъ ничто иное, какъ образующій кругъ. (См. Примѣчаніе XVIII).

И такъ, общее построеніе коническихъ сѣченій на плоскости, къ которому стремился Де-Лагиръ, собственно говоря, существовало уже съ давнихъ поръ, но оно не было ему извѣстно, потому что встрѣчалось только въ практическихъ приложеніяхъ перспективы и употреблялось только художниками. Весьма важная заслуга Де-Лагира состоитъ въ томъ, что онъ первый задумалъ воспользоваться этимъ преобразованіемъ фигуръ, какъ пособіемъ для раціональной геометріи, съ цѣлію переносить прямо свойства одной кривой въ плоскости на другія кривыя.

Способъ этотъ былъ обобщеніемъ двухъ другихъ преобразованій фигуръ. Первое изъ нихъ состоитъ въ томъ, что изъ постоянной точки проводятся ко всѣмъ точкамъ кривой радіусы, которые продолжаются въ постоянномъ отношеніи; концы продолженныхъ такимъ образомъ радіусовъ лежатъ на другой кривой, подобной прежней и подобно расположенной относительно постоянной точки; второе преобразованіе состоитъ въ томъ, что изъ всѣхъ точекъ кривой проводятся ординаты на постоянную ось и измѣняются въ данномъ отношеніи; концы ихъ принадлежатъ другой кривой одинаковой степени и одного рода съ данною кривою; при этомъ касательныя въ двухъ соотвѣтственныхъ точкахъ обѣихъ кривыхъ пересѣкаются на постоянной оси. Этимъ способомъ Стевинъ, Григорій С. Винцентъ и еще прежде ихъ знаменитый живописецъ Альбертъ Дюреръ получали эллипсъ посредствомъ круга. Оба эти способа преобразованія получаются изъ способа Де-Лагира, если предположимъ въ первомъ случаѣ слѣдъ и направляющую, а во второмъ случаѣ точку S—на безконечномъ разстояніи.

Въ сочиненіи о кривыхъ линіяхъ извѣстнаго геометра Джо-

на Лесли [45]) находимъ построеніе коническихъ сѣченій посредствомъ пересѣченія двухъ прямыхъ, вращающихся около двухъ неподвижныхъ полюсовъ; это построеніе также приводится къ построенію Де-Лагира. Лесли получилъ его при помощи перспективы, но не пользовался имъ, какъ Де-Лагиръ и Ле-Пуавръ, для доказательства свойствъ коническихъ сѣченій.

35. **Ньютонъ** (1642—1727). Въ то самое время, когда Де-Лагиръ нашелъ способъ образованія коническихъ сѣченій помощію круга, Ньютонъ изобрѣлъ способъ подобнаго же рода, имѣвшій цѣлію производить на плоскости такія преобразованія фигуръ, чтобы точкамъ соотвѣтствовали точки, прямымъ линіямъ—прямыя же линіи и чтобы нѣкоторыя прямыя, сходящіяся въ одной точкѣ, обращались въ параллельныя. Этотъ способъ предложенъ въ первой книгѣ *Principia*, гдѣ показано также, какъ при помощи его можно превращать всякое коническое сѣченіе въ кругъ и такимъ образомъ упрощать многія трудныя задачи.

Великій геометръ показалъ чрезвычайно простое геометрическое построеніе и далъ столь же простое аналитическое выраженіе для своихъ преобразованныхъ фигуръ; но онъ не указалъ пути, который привелъ его къ этому способу преобразованія; можетъ быть по этой причинѣ его способъ мало былъ разработанъ впослѣдствіи; потому что нашъ умъ всегда испытываетъ нѣкоторое затрудненіе и устраняется отъ такихъ предметовъ, въ которыхъ хотя и встрѣчаетъ достаточно очевидности для убѣжденія, но не видитъ ничего, что уясняло бы и показывало причины самаго существованія предмета. Намъ любопытно было сравнить способы Ньютона и Де-Лагира, узнать особенности, которыми они характеризуются, и найти поводы предпочесть одинъ способъ другому; чрезъ это мы надѣялись отыскать нить, руководившую Ньютономъ. Мы обнаружили, что фигуры у Ньютона тѣже,

---

[45]) *Geometrical analysis and Geometry of curve lines, etc.*, Edinburgh 1821, in-8°.

какъ у Де-Лагира, но размѣщены различнымъ образомъ одна относительно другой; ихъ также можно получить посредствомъ перспективы, совмѣщая послѣ этого въ одной плоскости, но и это инымъ образомъ, чѣмъ въ способѣ Де-Лагира. Оказывается, что способъ Ньютона представляетъ дѣйствительно одинъ изъ пріемовъ перспективы, указанный нѣсколькими писателями, изъ которыхъ назовемъ Vignole, Sirigati, Pozzo. (См. Примѣч. XIX).

36. Намъ было бы легко показать, какія громадныя средства могли бы извлечь геометры изъ сказанныхъ способовъ преобразованія кривыхъ линій на плоскости еще полтора вѣка тому назадъ, если бы роковое и несправедливое предубѣжденіе не изгнало этихъ способовъ изъ области чистой геометріи. Достаточно уже сказаннаго нами о томъ, что способъ Де-Лагира, по преимуществу, приводилъ къ тѣмъ же преобразованіямъ и къ той же цѣли, какъ и прекрасная теорія *гомологическихъ фигуръ*, изъ которой Понселе извлекъ столь многочисленные и замѣчательные результаты. Притомъ способъ Де-Лагира, также какъ и Ньютона, есть простой выводъ изъ нашего общаго принципа *гомографическаго преобразованія* (*déformation homographique*) и намъ пришлось бы повторять два раза одно и тоже, если бы мы стали распространяться здѣсь о приложеніяхъ этого принципа.

37. Оканчивая историческій обзоръ первыхъ способовъ преобразованія кривыхъ линій, замѣтимъ, что тотъ остроумный путь, которымъ Ле-Пуавръ дошелъ до своего преобразованія, также заслуживаетъ вниманія геометровъ; онъ основывается на идеѣ, заключающей въ себѣ цѣлую *начертательную геометрію*, т.-е. графическое изображеніе на плоскости тѣлъ, расположенныхъ въ пространствѣ. Эта идея въ приложеніяхъ перспективы выражается тѣмъ, что плоскость, помѣщенная въ пространствѣ, обозначается на *картинѣ* (tableau) двумя параллельными прямыми, изъ которыхъ одна есть *слѣдъ* самой плоскости, а другая—слѣдъ плоскости параллельной, проведенной черезъ точку зрѣнія. Прямая

линія будетъ поэтому изображаться двумя точками, въ которыхъ она сама и ей параллельная, проведенная черезъ точку зрѣнія, пересѣкаютъ плоскость картины. Итакъ мы имѣемъ здѣсь способъ всякое тѣло, данное въ пространствѣ, изображать на плоскости, употребляя при этомъ только одну постоянную точку, взятую произвольно внѣ этой плоскости. Этотъ новый родъ *начертательной геометріи* былъ въ недавнее время придуманъ и приведенъ въ исполненіе Кузинери, инженеромъ путей сообщенія. Къ сочиненію этого геометра мы возвратимся, когда будемъ говорить о начертательной геометріи Монжа.

38. *Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.* Труды геометровъ, о которыхъ мы упомянули въ началѣ третьей эпохи, какъ о двигателяхъ Декартовой геометріи, относились вообще только къ геометріи на плоскости. Однако знаменитый философъ, понимая всю важность и могущество способа координатъ, не ограничилъ употребленіе его только плоскими кривыми, но показалъ примѣненіе и къ теоріи *линій двоякой кривизны.* Для этого онъ изъ всѣхъ точекъ какой нибудь кривой въ пространствѣ опускалъ перпендикуляры на двѣ плоскости, наклоненныя другъ къ другу подъ прямымъ угломъ; основанія этихъ перпендикуляровъ образовали двѣ плоскія кривыя, которыя онъ относилъ къ осямъ координатъ, взятымъ въ каждой изъ плоскостей, при чемъ одну изъ осей бралъ по направленію линіи пересѣченія плоскостей.

Это ученіе о кривыхъ линіяхъ въ пространствѣ вело, какъ мы видимъ, къ системѣ трехъ координатъ и къ выраженію поверхности однимъ уравненіемъ между этими координатами. Но изслѣдованія геометровъ долгое время ограничивались только плоскими кривыми и аналитическая геометрія трехъ измѣреній развилась не ранѣе какъ черезъ полстолѣтіе.

Кажется, что **Паранъ** (Parent, 1666—1716) въ 1700 году въ первый разъ представилъ кривую поверхность уравненіемъ съ тремя перемѣнными въ мемуарѣ, читанномъ имъ въ Академіи наукъ.

Мы должны упомянуть объ этомъ мемуарѣ, потому что въ немъ встрѣчается первое приложеніе нашей системы координатъ въ пространствѣ и притомъ къ вопросамъ весьма труднымъ; но мемуаръ этотъ написанъ довольно небрежно, какъ и другія сочиненія того же геометра, весьма впрочемъ искуснаго и обладавшаго разнообразными свѣдѣніями. Здѣсь находимъ мы уравненія сферы и касательной плоскости ея, опредѣленіе *наибольшихъ* и *наименьшихъ* ординатъ въ нѣкоторыхъ сѣченіяхъ сферы; уравненія различныхъ поверхностей третьяго порядка и кривыхъ двоякой кривизны, проходящихъ черезъ точки, соотвѣтствующія *наибольшимъ* и *наименьшимъ* ординатамъ, наконецъ построеніе точекъ перегиба для нѣкоторыхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхностяхъ [46]).

Впослѣдствіи Иванъ Бернулли также выражалъ поверхности уравненіями между тремя координатами по поводу вопроса о кратчайшей линіи между двумя точками на данной поверхности.

Клеро (1713—1765). Но только въ 1731 году Клеро (Clairaut) въ знаменитомъ сочиненіи *Traité des courbes à double courbure,* которое онъ написалъ шестнадцати лѣтъ [47]),

---

[46]) Des affections des superficies: 1° de leurs plans tangens; 2° des plus grands et plus petits des superficies et de leurs plus grands et plus petits absolus; 3° des courbes qui soutiennet ou contiennent les plus grands et plus petits des superficies; 4° des courbes qui soutiennent ou contiennent les inflexions des superficies.—См. второй томъ *Essais et Recherches de mathématiques et de physique* de Parent; 3 тома in—12°, второе изданіе, 1713.

[47]) Клеро уже съ двѣнадцати лѣтъ сдѣлался извѣстенъ ученому міру своимъ мемуаромъ о четырехъ геометрическихъ кривыхъ; мемуаръ этотъ нашли достойнымъ напечатать вслѣдъ за мемуаромъ отца Клеро въ сборникѣ Берлинской Академіи (*Miscellanea Berolinensia*, t. IV, 1734).

Младшій братъ его, умершій шестнадцати лѣтъ, обнаруживалъ такой же ранній талантъ; четырнадцати лѣтъ онъ издалъ сочиненіе *Diverses quadratures circulaires, elliptiques et hyperboliques*, къ которому присоединено построеніе кубическихъ параболъ и различныхъ другихъ кривыхъ посредствомъ непрерывнаго движенія.

изложилъ въ первый разъ систематическимъ образомъ ученіе о координатахъ въ пространствѣ съ приложеніемъ къ кривымъ поверхностямъ и линіямъ двоякой кривизны, получаемымъ отъ ихъ пересѣченія.

Вопросы о касательныхъ къ такимъ кривымъ, о ихъ выпрямленіи, о квадратурѣ поверхностей, образуемыхъ ихъ ординатами, рѣшены въ этомъ трактатѣ съ изяществомъ и простотою, уступающими теперешнимъ пріемамъ только въ симметріи формулъ, которая введена была Монжемъ въ *Traité de l'application de l'Algèbre à la Géométrie*.

Названіе „кривая *двоякой кривизны*", которое Клеро принялъ, *потому что такая кривая имѣетъ въ одно время кривизну двухъ ея проэкцій*, было употреблено въ первый разъ **Пито** (Pitot, 1695—1771) [48]) въ мемуарѣ о винтовой линіи на поверхности прямаго круглаго цилиндра; мемуаръ этотъ читанъ въ Академіи наукъ въ 1724 году.

Это небольшое сочиненіе, одобренное Парижскою Академіею наукъ въ 1730 и напечатанное въ 1731 году, заслуживаетъ мѣста въ кабинетѣ библіографа рядамъ съ *Essai pour les coniques* Паскаля и съ *Recherches sur les courbes à double courbure* старшаго брата Клеро. Рѣдкость книги еще болѣе увеличиваетъ цѣну этого любопытнаго литературнаго произведенія, написаннаго четырнадцатилѣтнимъ геометромъ.

[48]) Пито предложилъ себѣ найти квадратуру кривой, которую прежде называли *compagne de la cycloïde* и которую Лейбницъ назвалъ впослѣдствіи линіею *синусовъ*, потому что ея абсциссы равнялись бы синусамъ ординатъ, еслибы эти ординаты были согнуты по окружности круга. Пито нашелъ 1^0 что эта кривая получается изъ эллипса, образуемаго при сѣченіи прямаго круглаго цилиндра плоскостію, наклоненною къ оси подъ угломъ равнымъ половинѣ прямаго (50^0), если поверхность цилиндра будетъ развернута въ плоскость и 2^0 что кривая эта получается также отъ проложенія винтовой линіи, начерченной на томъ же цилиндрѣ, на плоскость параллельную оси.

Оба эти предложенія были впослѣдствіи доказаны въ разныхъ сочиненіяхъ.

Кривая, объ которой мы говоримъ, разсматриваемая со стороны ея происхожденія изъ эллипса при развертываніи цилиндра, обратила на себя вниманіе Шуберта, который нашелъ ея квадратуру и выпрямленіе въ Петербургскихъ *Nova Acta*, t. XIII, 1795 и 1796 г.

39. Говоря объ Архитасѣ, Геминѣ и Паппѣ, мы имѣли случай замѣтить, что кривыя двоякой кривизны не были совершенно чужды наукѣ древнихъ. Съ тѣхъ поръ и до времени Клеро, когда началась теорія этихъ кривыхъ и значеніе ихъ въ обширной области свойствъ пространства, онѣ также встрѣчаются въ сочиненіяхъ многихъ геометровъ.

Въ дополненіе къ исторіи этихъ кривыхъ предлагаемъ слѣдующій краткій обзоръ въ хронологическомъ порядкѣ обстоятельствъ, при которыхъ онѣ встрѣчаются.

Въ 1530 году португалецъ **Ноніусъ** (1492—1577) и позднѣе Урайтъ, Стевинъ и Снеллій, изслѣдовали loxodromie— кривую двоякой кривизны на земномъ сфероидѣ. Эта кривая представляетъ путь корабля, направляющагося всегда въ одну сторону горизонта (въ одномъ румбѣ, или азимутѣ). Галлею мы обязаны любопытнымъ свойствомъ этой кривой, именно, что она есть стереографическая проэкція логариѳмической спирали.

Около 1630 года Роберваль въ *Traité des indivisibles* разсматривалъ кривую двоякой кривизны, описываемую циркулемъ на поверхности прямаго круглаго цилиндра; онъ вывелъ различныя свойства какъ этой кривой, такъ и той, которая изъ нея получается послѣ развертыванія цилиндра.

Нѣсколько позднѣе **Ла-Луберъ** (La Loubère, 1600—1664) изучалъ также эту кривую и назвалъ ее *цикло-цилиндрической*.

Въ 1637 году Декартъ въ концѣ второй книги своей Геометріи высказалъ нѣсколько словъ о кривыхъ двоякой кривизны вообще, не занимаясь ни одною изъ нихъ въ особенности; въ этихъ немногихъ словахъ заключалась вся теорія этихъ кривыхъ [49]).

Бюржа (*Burja*) въ *Mémoire sur les connaissances mathématiques d'Aristote* замѣчаетъ, что Аристотель, этотъ глава философовъ древности, также говоритъ объ этой кривой въ шестомъ вопросѣ десятаго отдѣла *Проблемъ*.

[49]) Декартъ показываетъ также построеніе нормалей къ линіямъ двоякой кривизны; но здѣсь онъ дѣлаетъ ошибку; онъ полагаетъ, что нор-

Паскаль рѣшилъ задачу о конической спирали—линіи двоякой кривизны на прямомъ конусѣ. (*Oeuvres de Pascal*, t. V, p. 422).

Курсье (P. Coursier) въ сочиненіи *Opusculum de sectione superficiei sphaericae per superficiem sphaericam, cylindricam atque conicam, etc.* in—4°, 1663, разсматривалъ почти исключительно кривыя двоякой кривизны; именно кривыя, происходящія отъ пересѣченія сферы съ круглымъ цилиндромъ и конусомъ, а также отъ пересѣченія двухъ послѣднихъ поверхностей при всевозможныхъ относительныхъ положеніяхъ ихъ между собою. Хотя предметъ этого сочиненія не представляетъ серьезныхъ трудностей, однако оно заслуживало бы большей извѣстности, нежели какую имѣетъ теперь [50]).

Предложенная Вивіани въ 1692 году задача о томъ, какъ прорѣзать въ полусферическомъ сводѣ четыре окна съ тѣмъ условіемъ, чтобы можно было найти площадь остальной части свода, была рѣшена при помощи линій двоякой кривизны и дала поводъ Валлису, Лейбницу и Бернулли разсматривать эти кривыя на сферѣ.

Германъ (1678—1733), рѣшая предложенный въ Лейпцигскихъ актахъ 1718 года вопросъ о распрямляемыхъ кри-

---

мали къ двумъ плоскимъ кривымъ, именно къ проэкціямъ линіи двоякой кривизны, сами будутъ проэкціями нормали этой кривой. Это можно сказать о касательныхъ, но не о нормаляхъ.

Какъ ни маловажна эта ошибка и какъ она ни чужда способу Декартовой геометріи, однако нельзя не удивляться, что она ускользнула отъ завистниковъ, а также и отъ поклонниковъ этого безсмертнаго изобрѣтенія, особенно отъ Роберваля, который всѣми силами, мучительно, желалъ найти въ немъ какой нибудь недостатокъ. Мало того, Рабюэль въ своемъ *Commentaire* доказалъ построеніе, указанное Декартомъ. Надобно сказать, что въ этомъ воображаемомъ доказательствѣ онъ избавляетъ себя отъ ссылокъ на элементы Евклида, что дѣлаетъ обыкновенно почти на каждой строчкѣ.

[50]) Фрезье (*Frezier*) въ *Traité de Stéréotomie* разсматривалъ тѣже кривыя, какъ и Курсье; послѣдній называлъ ихъ *curvitegae*; Фрезье же далъ имъ названіе *imbricatae* (*en forme de tuilé creuse*).

выхъ на сферѣ, пришелъ къ изслѣдованію сферической эпициклоиды, образуемой точкою поверхности круглаго конуса, катящагося по плоскости и имѣющаго вершину въ неподвижной точкѣ.

Въ 1728 году **Гвидо Гранди** (1671—1742) разсматривалъ на сферѣ двѣ кривыя двоякой кривизны, которыя онъ назвалъ *клеліями* (*clélies*) и для которыхъ нашелъ квадратуры. Одна изъ этихъ кривыхъ есть просто пересѣченіе сферы съ винтовою поверхностью, ось которой проходитъ чрезъ центръ сферы.

Наконецъ явилось сочиненіи Клеро, положившее основаніе теоріи линій двоякой кривизны и съ тѣхъ поръ изслѣдованія этихъ кривыхъ значительно умножились.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ЧЕТВЕРТАЯ ЭПОХА.

1. *Исчисленіе безконечно-малыхъ.* Черезъ пятьдесятъ лѣтъ послѣ того, какъ Декартъ издалъ свою *Геометрію*, появилось другое великое изобрѣтеніе, подготовленное Ферматомъ и Барровомъ,—исчисленіе безконечно малыхъ Лейбница и Ньютона (въ 1684 и 1687 г.)

Это величайшее открытіе, замѣнившее собою съ неизмѣримымъ преимуществомъ способы Кавальери, Роберваля, Фермата, Григорія С. Винцента въ вопросахъ о измѣреніи фигуръ и о *maxima* и *minima*, прилагалось притомъ съ такимъ необыкновеннымъ удобствомъ къ изученію важнѣйшихъ вопросовъ о явленіяхъ природы, что сдѣлалось почти исключительно предметомъ соображеній самыхъ знаменитыхъ геометровъ. Съ этихъ поръ геометрія древнихъ и прекрасные способы изученія коническихъ сѣченій Дезарга, Паскаля, Де-Лагира и Ле-Пуавра были оставлены безъ вниманія.

Изъ всѣхъ великихъ произведеній второй и третьей эпохи одинъ только анализъ Декарта избѣжалъ этой общей участи. И это потому, что онъ служилъ существеннымъ основаніемъ для ученій Лейбница и Ньютона,—ученій охватившихъ собою всю область математическихъ наукъ.

Впрочемъ, въ первое время, нѣкоторые геометры и во главѣ ихъ Гюйгенсъ, хотя умѣвшій оцѣнить всѣ выгоды анализа безконечно-малыхъ, затѣмъ Маклоренъ, глубокомысленный комментаторъ *Трактата о флюксіяхъ*, и самъ Ньютонъ—оставались вѣрны способу древнихъ и проникали въ самыя

глубокія тайны геометріи, чтобы при ея только помощи рѣшать важнѣйшіе и высшіе вопросы физико-математическихъ наукъ.

Послѣ того еще нѣкоторые геометры, каковы Стевартъ и Ламбертъ, достойные продолжатели этихъ великихъ людей, шли по ихъ слѣдамъ и разработывали ихъ методы. Но наконецъ привлекательность новизны и могущество средствъ, представляемыхъ анализомъ безконечно-малыхъ, увлекли всѣ умы къ другимъ идеямъ и соображеніямъ. Если иногда можно сказать, что геометрія Гюйгенса и Ньютона, положивъ начало нашимъ положительнымъ знаніямъ, сдѣлалась недостаточна для продолженія ею созданнаго дѣла, то справедливо замѣтитъ также, что она не имѣла послѣдователей; я не знаю, дѣлались ли втеченіе трехъ четвертей столѣтія какія-нибудь новыя приложенія этого метода; теперь же только по преданію и на вѣру, можетъ быть даже легкомысленно, говорятъ о безсиліи этого метода и предѣлахъ, навсегда ограничивающихъ его приложенія.

2. Мы не можемъ представить здѣсь разбора всѣхъ изслѣдованій названныхъ нами великихъ геометровъ; такая задача не входитъ въ предѣлы нашего сочиненія и была бы выше нашихъ силъ. Мы упомянемъ только о тѣхъ изслѣдованіяхъ, которыя относятся къ одному отдѣлу геометріи названному нами *геометріей вида и положенія;* это отдѣлъ, который получилъ начало въ *геометрическомъ анализѣ* древнихъ, потомъ въ теченіе двухъ тысячъ лѣтъ развивался въ приложеніяхъ къ неистощимой теоріи коническихъ сѣченій и къ которому наконецъ Декартъ однимъ почеркомъ пера присоединилъ безчисленное множество геометрическихъ кривыхъ.

Сперва мы представимъ краткій очеркъ послѣдовательныхъ открытій въ области важнѣйшихъ свойствъ этихъ кривыхъ; а потомъ уже, возвратившись опять къ началу, будемъ говорить объ успѣхахъ въ другихъ отдѣлахъ геометріи.

3. *Общія свойства геометрическихъ кривыхъ.* Аналитическая геометрія Декарта представляла общій пріемъ, въ высшей степени приспособленный къ изученію геометрическихъ

кривыхъ; этотъ философъ самъ показалъ все могущество и пользу его при рѣшеніи самыхъ разнообразныхъ вопросовъ. Но Ньютонъ и Маклоренъ первые приложили его къ изысканію общихъ и характеристическихъ свойствъ этого рода кривыхъ линій, такъ что открытіемъ первыхъ и важнѣйшихъ изъ этихъ свойствъ мы обязаны этимъ двумъ великимъ геометрамъ и знаменитому современнику ихъ Котесу.

Ньютонъ въ своемъ сочиненіи *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706 г.), представляющемъ удивительный образецъ высшей геометріи, показалъ три слѣдующія свойства, предложенныя имъ какъ распространеніе главныхъ свойствъ коническихъ сѣченій [1]).

Первое свойство относится къ *діаметрамъ* этихъ кривыхъ; оно состоитъ въ томъ, что, *если въ плоскости геометрической кривой будутъ проведены сѣкущія, параллельныя между собою, и на каждой изъ нихъ будетъ взятъ центръ среднихъ разстояній всѣхъ точекъ пересѣченія ея съ кривою, то всѣ эти центры будутъ лежать на одной прямой линіи.* Прямая эта называется *діаметромъ* кривой, *соотвѣтствующимъ, или сопряженнымъ, направленію сѣкущихъ.*

Второе общее свойство относится къ асимптотамъ: *если кривая имѣетъ столько асимптотъ, сколько единицъ въ степени ея уравненія, то для всякой сѣкущей какого угодно направленія центръ среднихъ разстояній точекъ пересѣченія ея съ асимптотами будетъ тотъ же, какъ и точекъ пересѣченія ея съ кривою.*

Другими словами: *сумма отрѣзковъ, заключающихся между каждою вѣтвію кривой и ея асимптотою, будетъ одинакова по ту и другую сторону діаметра, сопряженнаго сѣкущей.*

Наконецъ третье общее свойство заключается въ постоянствѣ отношенія между произведеніями отрѣзковъ, образуемыхъ на двухъ сѣкущихъ параллельныхъ двумъ неподвижнымъ

[1]) *Proprietates sectionum conicarum competunt curvis superiorum generum.*

осямъ. Это свойство можно выразить въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ: *если черезъ какую нибудь точку въ плоскости геометрической кривой проведемъ двѣ сѣкущія, параллельныя двумъ постояннымъ осямъ, то произведенія отрѣзковъ, заключающихся на этихъ сѣкущихъ между точкою ихъ пересѣченія между собою и между кривою, находятся въ постоянномъ отношеніи, гдѣ бы ни взята была эта точка.*

Легко видѣть, что эти три прекрасныя свойства, принадлежащія всѣмъ геометрическимъ кривымъ, представляютъ обобщеніе трехъ предложеній теоріи коническихъ сѣченій.

4. Главный предметъ сочиненія Ньютона состоялъ въ перечисленіи линій, заключающихся въ уравненіи третьей степени съ двумя перемѣнными. Ньютонъ различилъ семьдесятъ два вида кривыхъ; Стирлингъ прибавилъ къ этому еще четыре.

Послѣ этого перечисленія Ньютонъ далъ слѣдующее красивое и любопытное предложеніе, распредѣляющее эти кривыя на пять главныхъ обширныхъ классовъ: «Подобно тому, какъ кругъ, помѣщенный противъ свѣтящей точки, даетъ своею тѣнью всѣ кривыя втораго порядка, — отъ тѣни пяти расходящихся параболъ получаются всѣ кривыя третьяго порядка».

Сочиненіе оканчивается органическимъ образованіемъ коническихъ сѣченій посредствомъ двухъ вращающихся около вершины, угловъ, двѣ стороны которыхъ пересѣкаются всегда на прямой линіи, двѣ же другія своимъ пересѣченіемъ образуютъ коническое сѣченіе; этотъ способъ образованія распространенъ на кривыя третьей и четвертой степени, имѣющія двойную точку.

Жаль, что Ньютонъ ограничился изложеніемъ этихъ прекрасныхъ открытій и не далъ ни доказательствъ, ни указаній на тотъ методъ, которому онъ слѣдовалъ. Черезъ нѣсколько лѣтъ Стирлингъ пополнилъ этотъ недостатокъ, возстановивъ съ необходимыми предварительными разъясненіями доказательства предложеній Ньютона, относящихся къ пере-

численію линій третьяго порядка. Остальныя части сочиненія были доказаны впослѣдствіи различными геометрами. Прекрасная теорема объ образованіи всѣхъ кривыхъ третьяго порядка посредствомъ тѣни пяти расходящихся параболъ,—теорема, казавшаяся самою трудною,—была доказана Клеро [2]), Николемъ [3]), Мурдохомъ [4]) и Жакье [5]). Но намъ кажется что аналитическія соображенія, въ которыхъ эти геометры почерпали достаточное подтвержденіе справедливости Ньютоновой теоремы, не обнаруживаютъ ни сущности, ни происхожденія ея. Поэтому отъ геометровъ, писавшихъ объ этомъ предметѣ, ускользнула другая подобная же теорема, находящаяся въ ближайшей связи съ теоремою Ньютона и представляющая другой способъ образованія всѣхъ кривыхъ третьяго порядка посредствомъ тѣни пяти изъ нихъ. Теорема эта состоитъ въ томъ, что *между всѣми кривыми третьяго порядка существуетъ пять кривыхъ, имѣющихъ центръ* [6]) *и эти кривыя своею тѣнью, брасаемою на плоскость, образуютъ всѣ остальныя.*

Эта новая теорема и теорема Ньютона проистекаютъ изъ одного свойства точекъ перегиба, которое, по нашему мнѣнію, есть настоящее основаніе этихъ теоремъ и можетъ быть полезно для чисто геометрической классификаціи кривыхъ третьяго порядка, основанной на различіи ихъ формъ. Свойство это мы изложимъ въ Примѣчаніи XX.

5. **Маклоренъ** (1698—1746). Маклоренъ, вдохновенный прекрасными открытіями Ньютона написалъ два сочиненія великой важности о геометрическихъ кривыхъ. Въ первомъ изъ нихъ, посвященномъ органическому образованію

---

[2]) *Mémoires de l'Academie des sciences*, 1731.

[3]) Тамъ же.

[4]) Murdoch. *Neutoni Genesis curvarum per umbras*, in—8⁰, Lond. 1746.

[5]) Pére Jacquier. *Elementi di perspettiva.* Appendice, in—8⁰, Romae, 1755.

[6]) Это кривыя, помѣщенныя въ перечисленіи 72-хъ видовъ Ньютона подъ nⁿ⁰ 27, 38, 59, 62, 72 и изображенныя на фигурахъ 37, 47, 67, 70 и 81.

геометрическихъ кривыхъ [7]), авторъ даетъ различные способы черченія всѣхъ геометрическихъ кривыхъ посредствомъ пересѣченія сторонъ двухъ движущихся извѣстнымъ образомъ угловъ. Здѣсь доказательства, изложенныя по способу координатъ, не всегда представляютъ достаточно простоты; но другое сочиненіе Маклорена *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* отличается необыкновеннымъ изяществомъ и строгостію.

Все это сочиненіе основывается на двухъ теоремахъ, заключающихъ въ себѣ два прекрасныя общія свойства геометрическихъ кривыхъ. Первая есть теорема знаменитаго **Котеса** (1682 — 1716), которую другъ его ученый физикъ Р. Смитъ нашелъ въ его бумагахъ и сообщилъ Маклорену. Теорему эту можно выразить слѣдующимъ образомъ: *Если около неподвижной точки будемъ вращать сѣкущую встрѣчающуюся съ геометрической кривой въ стольких точкахъ A, B,.... каковъ ея порядокъ, и если въ каждомъ положеніи сѣкущей будемъ брать на ней такую точку M, чтобы обратная величина разстоянія ея отъ неподвижной точки была средняя ариѳметическая между обратными величинами разстояній точекъ A, B,.... отъ неподвижной точки, то геометрическимъ мѣстомъ точки M будетъ прямая линія.*

Отрѣзокъ отъ неподвижной точки до точки *M* Маклоренъ называетъ *среднимъ гармоническимъ* между отрѣзками отъ неподвижной точки до кривой [8]). Понселе назвалъ точку *M* *центромъ среднихъ гармоническихъ* относительно неподвижной точки и точекъ *A, B,....* [9]). Этотъ же геометръ пока-

[7]) *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universatis*, in — 4°, 1719.

[8]) Маклоренъ говоритъ, что количество есть *среднее гармоническое* между нѣсколькими другими, когда обратная величина его есть средняя ариѳметическая между обратными величинами этихъ количествъ (*Traité des courbes géométriques*, § 28).

[9]) *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques.* Журналъ Крелля, томъ III.

залъ, что, если неподвижная точка находится въ безконечности, то точка M дѣлается центромъ среднихъ разстояній точекъ A, B,... ; отсюда слѣдуетъ, что теорема Котеса есть обобщеніе теоремы Ньютона о *діаметрахъ* кривыхъ линій.

Вторая теорема, употребляемая Маклореномъ и найденная имъ самимъ, есть слѣдующая:

Черезъ неподвижную точку въ плоскости геометрической кривой проводимъ сѣкущую, встрѣчающуюся съ кривою въ столькихъ точкахъ, каковъ порядокъ ея; въ этихъ точкахъ проводимъ касательныя къ кривой; черезъ туже неподвижную точку проводимъ наконецъ еще неподвижную прямую по произвольному направленію: отрѣзки на этой прямой, заключающіеся между неподвижною точкою и всѣми касательными кривой таковы, что сумма обратныхъ имъ величинъ постоянна, каково бы ни было положеніе первой сѣкущей.

Сумма эта равна суммѣ обратныхъ величинъ отрѣзковъ, образующихся на той же неподвижной прямой между тою же точкою и точками пересѣченія этой прямой съ кривою.

6. Вторая теорема представляетъ важное обобщеніе теоремы Ньютона объ асимптотахъ; одна изъ этихъ теоремъ переходитъ въ другую при перспективѣ.

Такимъ образомъ двѣ изъ трехъ Ньютоновыхъ теоремъ о геометрическихъ кривыхъ обобщены Котесомъ и Маклореномъ. Третья теорема, относящаяся къ отрѣзкамъ между параллельными сѣкущими, получила подобное же обобщеніе въ *Géométrie de position*, гдѣ разсматриваются сѣкущія, проходящія черезъ одну точку. Карно далъ даже еще болѣе широкое и полезное обобщеніе этой теоремы, разсматривая ее какъ частный случай прекраснаго общаго предложенія о какомъ-нибудь многоугольникѣ, проведенномъ въ плоскости геометрической кривой.

7. Въ вышеприведенной теоремѣ Маклоренъ разсматривалъ также случай. когда неподвижная точка. черезъ которую про-

водятся сѣкущія, находится на самой кривой, и при помощи свойствъ круга онъ превращалъ уравненіе, выражающее теорему, въ другое, содержащее хорду круга кривизны кривой въ неподвижной точкѣ. Этимъ путемъ онъ получилъ двѣ другія теоремы, служившія ему для построенія круга кривизны и для дифференціальнаго выраженія радіуса кривизны.

Такое геометрическое построеніе круга кривизны прямо на чертежѣ, безъ помощи теоріи флюксій и даже безъ помощи Декартова анализа, оставалось, кажется, незамѣченнымъ въ сочиненіи Маклорена и мы не знаемъ, говорилось ли о немъ когда-нибудь. Мы думаемъ однако, что оно заслуживаетъ вниманія, потому что до сихъ поръ задача эта считалась разрѣшимою не иначе какъ при пособіи анализа.

Маклоренъ предполагаетъ извѣстнымъ направленіе нормали въ той точкѣ, для которой опредѣляется кругъ кривизны. Удивительно, что ему не пришло на мысль построить и нормаль путемъ чисто геометрическимъ, безъ помощи анализа. Задача эта того же рода, какъ и задача о кругѣ кривизны, и даже проще ея. Мы нашли очень простое построеніе той и другой, вытекающее изъ третьей теоремы Ньютона. Въ то время мы не знали еще, что построеніе круга кривизны уже существуетъ; рѣшеніе наше впрочемъ совершенно отличается отъ рѣшенія Маклорена, потому что основывается на другомъ свойствѣ геометрическихъ кривыхъ.

8. Четыре общія теоремы, о которыхъ мы говорили, составляютъ предметъ перваго отдѣла въ сочиненіи Маклорена. Въ двухъ другихъ отдѣлахъ находятся приложенія этихъ теоремъ къ коническимъ сѣченіямъ и къ кривымъ третьяго порядка.

Во второмъ отдѣлѣ мы встрѣчаемъ различныя свойства гармоническаго дѣленія сѣкущихъ въ коническомъ сѣченіи и теорему о вписанномъ четыреугольникѣ (которую мы вывели изъ шестиугольника Паскаля), заключающую въ себѣ теорію полюсовъ. Теорема о шестиугольникѣ изложена здѣсь

безъ доказательства, такъ какъ Маклоренъ доказалъ ее различными способами въ другомъ мѣстѣ.[10]).

Отдѣлъ третій заключаетъ въ себѣ множество любопытныхъ свойствъ кривыхъ линій третьяго порядка. Слѣдующее есть самое важное, изъ котораго выводится большая часть другихъ свойствъ, относящихся къ точкамъ перегиба и двойнымъ точкамъ; вотъ оно:

Если четыре вершины и двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника лежатъ на кривой третьяго порядка, то касательныя проведенныя въ противоположныхъ вершинахъ будутъ пересѣкаться на той же кривой.

Эту теорему Маклоренъ изложилъ еще прежде въ *Treatise of fluxions* (n^0 401) и замѣтилъ, что теорема о четыреугольникѣ вписанномъ въ коническое сѣченіе есть ея частный случай; въ этомъ нетрудно убѣдиться, если будемъ разсматривать коническое сѣченіе въ совокупности съ прямою, соединяющею точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника, какъ кривую третьяго порядка.

Теорему Паскаля можно также разсматривать, какъ слѣдствіе одного свойства кривыхъ третьяго порядка, болѣе общаго, чѣмъ свойство Маклорена, именно слѣдующаго:

Если шесть вершинъ шестиугольника и двѣ изъ трехъ точекъ пересѣченія его противоположныхъ сторонъ лежатъ на кривой третьяго порядка, то третья точка пересѣченія находится на той же кривой [11]).

---

[10]) *Philosophical Transactions*, n^0 439; 1735; и *Treatise of fluxions*, n^0n^0 322, 623.

[11]) Чтобы доказать эту теорему, достаточно разсматривать въ шестиугольникѣ три стороны нечетнаго порядка, какъ кривую третьяго порядка, и стороны четнаго порядка, какъ другую кривую третьяго порядка. Черезъ девять точекъ пересѣченія этихъ линій можно провести безчисленное множество кривыхъ третьяго порядка; но данная кривая проходитъ черезъ восемь изъ этихъ точекъ, а потому, на основаніи общаго свойства кривыхъ третьяго порядка, она проходитъ и черезъ девятую.

9. Существуетъ еще отрывокъ изъ одного мемуара Маклорена о теоріи кривыхъ линій, написаннаго имъ во Франціи въ 1721 году въ видѣ дополненія къ *Geometria organica*; печатаніе этого мемуара было начато, но онъ не былъ изданъ. Въ 1732 году упомянутый отрывокъ былъ переданъ Лондонскому Королевскому Обществу и напечатанъ въ *Philosophical Transactions* 1735 года. Въ немъ слѣдуетъ замѣтить одну теорему, составляющую значительнѣйшую его часть, именно:

Если многоугольникъ, измѣняемаго вида, перемѣщается такъ, что всѣ стороны его проходятъ черезъ данныя точки, а всѣ вершины, кромѣ одной, движутся по геометрическимъ кривымъ порядковъ $m, n, p, q, \ldots$; то свободная вершина описываетъ вообще кривую порядка $2mnpq\ldots$; и порядка вдвое меньшаго $mnpq\ldots$, когда всѣ данныя точки находятся на одной прямой.

Если всѣ направляющія линіи будутъ прямыя, то кривая, описывается свободною вершиною многоугольника, будетъ коническое сѣченіе; если вмѣсто многоугольника возьмемъ треугольникъ, то теорема будетъ ничто иное, какъ шестиугольникъ Паскаля. Для случая, когда одна изъ трехъ точекъ, черезъ которыя должны проходить стороны измѣняющагося треугольника, находится въ безконечности, теорема эта была доказана еще Ньютономъ (лемма 20-я 1-й книги *Principia*). Но Маклорену обязаны мы изложеніемъ ся въ общемъ видѣ и тѣмъ, что въ этомъ способѣ образованія кривыхъ онъ усмотрѣлъ прекрасную теорему Паскаля, которая въ то время была неизвѣстна, такъ какъ *Essai sur les coniques*, въ которомъ она изложена, было найдено стараніями аббата Боссю только въ 1779 году [12]).

[12]) Можетъ быть Маклорену, бывшему около 1721 года во Франціи, и извѣстно было сочиненіе Паскаля; но теорема о шестиугольникѣ проистекаетъ такъ естественно изъ способа образованія коническихъ сѣченій помощію подвижнаго треугольника, что было бы удивительно, если бы она ускользнула отъ проницательности Маклорена, который глубоко

Впослѣдствіи Маклоренъ прямо доказалъ эту теорему для круга и отсюда, по способу перспективы, распространилъ ее на всѣ виды коническихъ сѣченій. (См. *Treatise of fluxions*, гл. XIV, гдѣ Маклоренъ доказываетъ важнѣйшія свойства эллипса, разсматривая его, какъ сѣченіе косаго цилиндра съ круглымъ основаніемъ).

10. **Брайкенриджъ** (Braikenridge) былъ достойнымъ соревнователемъ Маклорена въ вопросѣ объ образованіи кривыхъ всѣхъ порядковъ и теорія эта обязана ему многими основными предложеніями, относящимися главнымъ образомъ къ образованію кривыхъ посредствомъ пересѣченія прямыхъ, вращающихся около неподвижныхъ полюсовъ; изслѣдованія его помѣщены въ сочиненіи его: *Exercitatio Geometriae de descriptione linearum curvarum* (in — 4°, 1733) и въ мемуарѣ его, напечатанномъ въ *Philosophical Transactions*, 1735.

Послѣ этого многіе другіе геометры съ успѣхомъ прилагали Декартову геометрію къ общей теоріи геометрическихъ кривыхъ.

Николь (Nicole, 1683 — 1759), по примѣру Стирлинга, доказавшаго предложенія, только указанныя Ньютономъ въ *Enumeratio linearum tertii ordines*, началъ также изъясненіе началъ, которыми могъ руководствоваться великій геометръ, и далъ доказательство важнаго и любопытнаго предложенія объ образованіи всѣхъ кривыхъ третьяго порядка посредствомъ тѣни пяти расходящихся параболъ,—предложенія, которое не было доказано Стирлингомъ [13]).

Аббатъ **Бражелонъ** (Bragelogne, 1688 — 1744) первый доказалъ, еще въ 1708 году, прекрасныя теоремы Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій и кривыхъ третьяго и четвертаго порядка, имѣющихъ двойныя то-

---

вдумывался во все, относившееся къ образованію кривыхъ линій, какъ онъ говоритъ это самъ въ письмѣ, сообщенномъ Лондонскому Королевскому Обществу 21 декабря 1732 года. (*Philosophical Transactions*, 1735).

[13]) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1731.

чки [14]); потомъ онъ предпринялъ перечисленіе и изслѣдованіе формъ и особенностей кривыхъ четвертаго порядка. Это — работа громадная и трудная, которой только первыя части были изданы: смерть автора лишила насъ остальныхъ частей [15]).

Аббатъ **Де-Гюа** (De-Gua, 1712—1786) въ превосходномъ сочиненіи подъ заглавіемъ: *Usages de l'analyse de Descartes* (in — 12°, 1740) показалъ способы опредѣлять касательныя, асимптоты и особыя точки (кратныя, сопряженныя, точки перегиба и возврата) въ кривыхъ всякаго порядка; онъ первый обнаружилъ, при помощи перспективы, что многія изъ этихъ точекъ могутъ находиться въ безконечности; это привело его къ объясненію *a priori* той любопытной аналогіи, которая существуетъ между различными видами такихъ точекъ и различными видами безконечныхъ вѣтвей кривыхъ линій, какъ-то гиперболическими и параболическими; къ аналогіи этой онъ еще прежде приведенъ былъ анализомъ.

Этотъ искусный геометръ имѣлъ цѣлію доказать, что въ большинствѣ изысканій о геометрическихъ кривыхъ анализъ Декарта можетъ быть употребляемъ съ такимъ же успѣхомъ, какъ и дифференціальное исчисленіе. Онъ признавалъ пользу исчисленія безконечно-малыхъ только въ рѣшеніи задачъ интегральнаго исчисленія и въ вопросахъ относительно кривыхъ механическихъ. Дѣйствительно, это единственные вопросы, въ которыхъ нельзя обойтись безъ этого исчисленія и только ихъ рѣшалъ Ньютонъ подобнымъ путемъ.

Эйлеръ (1707 — 1783) въ *Introductio in analysin infinitorum* (2 vol. in — 4°, 1748) изложилъ общія начала аналитической теоріи геометрическихъ кривыхъ съ тою общностію и ясностію, которыми отличаются сочиненія этого великаго геометра; распространяя подобныя же изысканія на

---

[14]) *Journal des Savans,* 30 septembre 1708.

[15]) Первая часть этого перечисленія напечатана въ *Mémoires de l'Académie des sciences* 1730 и 1731 года, вторая же не была издана; разборъ ея находится въ *Histoire de l'Académie pour 1732.*

геометрію трехъ измѣреній, онъ въ первый разъ изслѣдовалъ уравненіе съ тремя перемѣнными, заключающее въ себѣ поверхности втораго порядка.

Въ то же самое время **Крамеръ** (1704 — 1752) издалъ по этой обширной и важной отрасли геометріи спеціальное сочиненіе подъ заглавіемъ: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (in — 4°, 1750); это есть самое полное сочиненіе, уважаемое и до сихъ поръ.

Вскорѣ послѣ этого явилось сочиненіе: *Traité des courbes algébriques* (in — 12, 1756) **Дю-Сежура** и **Гудена** (Dionis du Séjour, 1734 — 1794; Goudin, 1734 — 1805), въ которомъ ясно и точно рѣшены, съ помощію одного только анализа Декарта, задачи объ особенностяхъ кривыхъ, о ихъ касательныхъ, асимптотахъ, радіусахъ кривизны и пр.

Гуденъ издалъ еще другое сочиненіе: *Traité des propriétés communes à toutes les courbes*, имѣющее предметомъ преобразованіе координатъ въ уравненіяхъ какихъ-нибудь кривыхъ линій. Это рядъ формулъ съ тремя и четырьмя перемѣнными, изъ которыхъ каждая выражаетъ вообще особое свойство кривой линіи [16]).

Упомянемъ еще о **Варингѣ** (Waring, 1734 — 1798), который во многихъ сочиненіяхъ своихъ шелъ далѣе своихъ предшественниковъ въ открытіяхъ по теоріи кривыхъ линій [17]).

Вотъ, кажется, всѣ замѣтныя усовершенствованія въ те-

---

[16]) Здѣсь находимъ, между прочимъ, сорокъ пять различныхъ уравненій эллипса, въ которыхъ за начало координатъ принимается центръ и фокусъ.

Это интересное сочиненіе Гудена имѣло три изданія; послѣднее въ 1803 году; ко всѣмъ изданіямъ прибавлены: мемуаръ о солнечныхъ затменіяхъ и статья объ алгебраическихъ кривыхъ; въ послѣднемъ же изданіи кромѣ того мемуаръ объ употребленіи эллипса въ тригонометріи.

[17]) Кромѣ многихъ—мемуаровъ напечатанныхъ по англійски въ *Philosophical Transactions* 1763 и 1791 года, Варингъ написалъ о геометрическихъ кривыхъ два особые трактата: *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, in — 4°, 1762; и *Proprietates geometricarum curvarum*, in — 4°, 1772.

оріи кривыхъ линій, имѣвшія источникомъ геометрію древнихъ и анализъ Декарта.

11. Въ періодъ, о которомъ мы говоримъ, успѣхи по другимъ отдѣламъ науки о пространствѣ были менѣе значительны и не такъ удовлетворительны, какъ въ общей теоріи геометрическихъ кривыхъ. Впрочемъ изслѣдованія коническихъ сѣченій продолжались и со стороны великихъ математиковъ Галлея, Стеварта, Симсона и др. сдѣланы были усилія, чтобы возстановить и возбудить стремленіе къ геометріи древнихъ; нѣкоторые частные вопросы были изслѣдуемы отъ времени до времени знаменитыми аналистами Эйлеромъ, Ламбертомъ, Лагранжемъ, Фуссомъ и др. въ тѣ немногія свободныя минуты, которыя имъ оставались отъ избранныхъ ими занятій. Но труды эти, какъ намъ кажется, могли только поддерживать знаніе пріемовъ древней геометріи, но не были способны породить новыя изслѣдованія; истинные успѣхи въ чистой геометріи начинаются не ранѣе, какъ съ начала нынѣшняго столѣтія.

Геометрія въ приложеніи къ физическимъ явленіямъ. Но въ эту эпоху геометрія получила особое значеніе, благодаря ея приложеніямъ къ физическимъ явленіямъ и благодаря великимъ открытіямъ, которыя при ея помощи сдѣланы были въ системѣ міра Ньютономъ, Маклореномъ, Стевартомъ, Ламбертомъ. Никогда *прикладная геометрія* не имѣла такого блеска; къ сожалѣнію это продолжалось недолго и мы должны сознаться, что въ наше время эта наука почти совсѣмъ неизвѣстна: исчисленіе безконечно-малыхъ исключительно овладѣло всѣми вопросами, которые рѣшались при помощи геометріи Ньютономъ и его учениками.

12. *Успѣхи чистой геометріи.* Возвратимся къ геометріи теоретической и попытаемся дать отчетъ о характерѣ и размѣрахъ изслѣдованій, способствовавшихъ ея развитію; для этого мы представимъ разборъ главныхъ сочиненій геометровъ, изучавшихъ эту науку или для нея самой, или, чтобы пользоваться ею какъ пособіемъ при изученіи явленій природы.

Галлей (1656 — 1742). Знаменитый астрономъ Галлей, обладавшій обширными свѣдѣніями и отличавшійся особенно глубокимъ знаніемъ геометріи греческой школы, соорудилъ превосходный памятникъ древней наукѣ своими переводами важнѣйшихъ сочиненій древнихъ геометровъ, болѣе вѣрными, чѣмъ всѣ предшествовавшіе. Особенно замѣчательно великолѣпное изданіе коническихъ сѣченій Аполлонія, гдѣ съ замѣчательнымъ талантомъ возстановлена 8-я книга, текстъ которой до сихъ поръ не былъ еще найденъ. Продолженіе составляютъ двѣ книги Серена о сѣченіяхъ конуса и цилиндра.

Галлею же мы обязаны переводомъ съ арабской рукописи неизвѣстнаго до тѣхъ поръ сочиненія *De sectione rationis* и возстановленіемъ, на основаніи указаній Паппа, трактата *De sectione spatii.*

Предметъ этихъ двухъ сочиненій состоялъ, какъ извѣстно, въ проведеніи черезъ точку, взятую внѣ двухъ линій, такой сѣкущей, которая на этихъ прямыхъ, начиная отъ двухъ постоянныхъ точекъ, образовала бы отрѣзки, имѣющіе въ первомъ случаѣ данное отношеніе, а во второмъ—данное произведеніе.

Каждый изъ этихъ вопросовъ допускаетъ вообще два рѣшенія и слѣдовательно въ анализѣ приводился бы къ уравненію второй степени. Интересно видѣть, съ какимъ искуствомъ Аполлоній рѣшаетъ первый вопросъ помощію средней пропорціональной. Его геометрическія соображенія соотвѣтствуютъ дѣйствіямъ, которыя мы употребили бы для уничтоженія втораго члена въ квадратномъ уравненіи.

Ньютонъ, питавшій уваженіе къ геометріи древнихъ, особенно отличалъ этотъ трактатъ Аполлонія. „Я слышалъ не разъ, говоритъ ученый Пембертонъ,[18]) что онъ одобрялъ намѣреніе Гуго Омерика возстановить древній анализъ и чрез-

---

[18]) *View of sir Isaac Newton's philosophy,* in — 4⁰, 1728; переведено на французскій языкъ въ 1755 году подъ заглавіемъ: *Elémens de la philosophie Newtonienne.*

вычайно хвалилъ книгу Аполлонія *De sectione rationis*,—книгу, которая болѣе всѣхъ твореній древности раскрываетъ передъ нами сущность этого анализа".

Переводъ Галлея обогащенъ многими примѣчаніями; въ нихъ даны общія и изящныя построенія, обнимающія собою большинство частныхъ случаевъ задачи, разсматриваемыхъ Аполлоніемъ отдѣльно и весьма подробно, такъ какъ они имѣли назначеніе служить формулами, которыя всякій геометръ долженъ былъ имѣть подъ руками при рѣшеніи задачъ. Изъ одного примѣчанія видно, что самый общій случай приводится къ проведенію черезъ данную точку двухъ касательныхъ къ параболѣ, опредѣляемой вполнѣ посредствомъ данныхъ вопроса. Это счастливое замѣчаніе даетъ средство для яснаго и простаго изслѣдованія всѣхъ частныхъ случаевъ задачи; оно привело Галлея къ различнымъ свойствамъ касательныхъ къ параболѣ, между прочимъ къ слѣдующему: *Если около параболы описанъ четырсугольникъ, то всякая касательная дѣлитъ противоположныя стороны его на части пропорціональныя.* Всѣ подобныя предложенія суть только частные случаи одного общаго предложенія, названнаго нами *ангармоническимъ* свойствомъ касательныхъ коническаго сѣченія. (См. Примѣчаніе XVI).

Галлей не зналъ ни слова по арабски, когда любовь къ геометріи заставила его предпринять переводъ рукописи *de sectione rationis*. Въ предисловіи онъ разсказываетъ исторію этой рукописи, остававшейся въ теченіи многихъ лѣтъ забытою въ Бодлейенской библіотекѣ. Онъ сожалѣетъ объ утратѣ множества другихъ сочиненій греческой школы и не сомнѣвается, что многія изъ нихъ могли бы еще быть найдены, если бы съ большимъ стараніемъ позаботились объ этомъ. По этому поводу онъ обращается съ мольбою ко всѣмъ ученымъ, которымъ доступны библіотеки, обладающія рукописями. Мы считаемъ долгомъ привести здѣсь эти мысли и желанія знаменитаго Галлея, которыя должны имѣть важное значеніе въ глазахъ всѣхъ просвѣщенныхъ людей, имѣющихъ

возможность какимъ бы то ни было образомъ принести пользу математическимъ наукамъ.

Галлеемъ было приготовлено изданіе сферики Менелая въ трехъ книгахъ, свѣренное съ еврейскою рукописью. Но оно появилось только въ 1758 году, благодаря стараніямъ друга Галлея доктора Костарда, автора исторіи астрономіи.

Съ глубокимъ знаніемъ геометріи древнихъ Галлей соединялъ полное пониманіе способа Декарта. Онъ пользовался имъ преимущественно для усовершенствованія пріемовъ построенія уравненій третьей и четвертой степени, употребляя для этой цѣли какую нибудь данную параболу и кругъ [19]).

Его изданія сочиненій Аполлонія, Серена и Менелая весьма высоко цѣнятся любителями геометріи [20]); ихъ однихъ было бы достаточно, чтобы дать Галлею почетное мѣсто въ ряду ученыхъ, способствовавшихъ развитію математическихъ наукъ, если бы труды по астрономіи безъ того не ставили его на ряду съ знаменитѣйшими людьми той эпохи: Доминикомъ Кассини, Гюйгенсомъ и Ньютономъ.

13. Хотя Ньютонъ и Маклоренъ, о прекрасныхъ изысканіяхъ которыхъ въ теоріи геометрическихъ кривыхъ мы уже говорили, не писали особо о геометріи древнихъ, однако они такъ высоко цѣнили способы древнихъ, что почти исключительно употребляли ихъ въ своихъ физико-математическихъ изслѣдованіяхъ. Поэтому мы должны бросить еще взглядъ на сочиненія этихъ геометровъ.

Изъ трудовъ **Ньютона** мы остановимся на *Arithmetica universalis* и на его большомъ сочиненіи *Principia*.

Arithmetica universalis есть превосходный образецъ приложенія способа Декарта къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ и къ построенію корней уравненій; здѣсь находится

[19]) *Philosophical Transactions*, 1687, n⁰ 188.

[20]) Всѣ эти сочиненія очень рѣдки, въ особенности трактатъ *De sectione rationis;* это до сихъ поръ единственная книга, въ которой можно найти, вмѣстѣ съ переводомъ болѣе точнымъ, чѣмъ переводъ Коммандина, полный греческій текстъ предисловія къ 7-й книгѣ „*Математическаго Собранія*“ Паппа.

множество разнообразныхъ предложеній, относящихся ко всѣмъ отдѣламъ математики. Это сочиненіе въ наше время читаютъ слишкомъ мало, забывая вѣроятно, что знаменитый авторъ, излагая здѣсь свои лекціи, читанныя въ Кембриджскомъ университетѣ, считалъ это сочиненіе способнымъ ознакомить его слушателей съ наукой и со всѣми знаніями, необходимыми для геометра.

14. Первая книга *Principia* содержитъ множество различныхъ предложеній чистой геометріи. Особенно замѣчательны прекрасныя свойства коническихъ сѣченій и задачи о построеніи этихъ кривыхъ по даннымъ точкамъ и касательнымъ, или также по данному при этомъ фокусу. Подобныя изысканія были въ то время по большей части новы; они служили Ньютону вступленіемъ къ объясненію всѣхъ небесныхъ явленій изъ его закона всеобщаго тяготѣнія и къ выводу *a priori* и вычисленію при помощи этого единственнаго начала движенія всѣхъ небесныхъ тѣлъ. Этимъ Ньютонъ оказалъ величайшую почесть изслѣдованіямъ древнихъ геометровъ о коническихъ сѣченіяхъ, послѣ того, какъ Кеплеръ изъ нихъ же почерпнулъ открытіе истинной формы планетныхъ орбитъ.

Въ настоящее время почти совсѣмъ не употребляются геометрическія предложенія и многочисленныя свойства коническихъ сѣченій, которыя необходимы для изслѣдованія вопросовъ о системѣ міра по способу Ньютона; этимъ объясняется, почему такой способъ, независимо отъ выгодъ, представляемыхъ способомъ аналитическимъ, теперь оставленъ и почему его считаютъ долгимъ и труднымъ и не ожидаютъ отъ него ничего, или почти ничего, въ будущемъ. Такое мнѣніе усиливается съ каждымъ днемъ, потому что анализъ, которымъ всѣ занимаются исключительно, дѣлаетъ постоянные успѣхи и вмѣстѣ съ тѣмъ упрощаются и совершенствуются болѣе и болѣе тѣ первые аналитическіе пріемы, которые замѣнили собою способъ Ньютона. Послѣдній же, оставленный безъ разработки, остается въ томъ же состояніи, въ какомъ онъ вышелъ изъ рукъ своего знаменитаго автора.

И когда эти способы сравниваютъ между собою, никто не указываютъ на первоначальныя попытки аналистовъ, когда прекрасные выводы Ньютона превращены были сначала въ тяжелый и неизящный анализъ, совершенствовавшійся потомъ съ каждымъ днемъ, благодаря постояннымъ усиліямъ знаменитѣйшихъ геометровъ. Отчего же при этомъ не принимаютъ по крайней мѣрѣ въ соображеніе тѣхъ усовершенствованій, которыя могли бы быть сдѣланы въ геометрическомъ способѣ, дающемъ иногда такіе наглядные результаты, если бы только онъ не былъ совершенно оставленъ?

Внимательный разборъ различныхъ предложеній чистой геометріи, употребляемыхъ въ *Principia* Ньютона, даетъ намъ понятіе о томъ, каковы бы могли быть эти усовершенствованія. Такъ мы узнаемъ, что эти предложенія, кажущіяся совершенно различными и доказываемыя каждое особымъ способомъ, могутъ быть приведены къ двумъ, или тремъ главнымъ свойствамъ коническихъ сѣченій, изъ которыхъ они проистекаютъ, какъ частные случаи, или простыя слѣдствія. Такимъ образомъ теперь новый комментарій къ *Principia* Ньютона, составленный въ духѣ и со средствами новой геометріи, сократилъ и упростилъ бы въ высшей степени чтеніе этого безсмертнаго сочиненія.

15. Покажемъ теперь, что предложенія Ньютона могутъ, какъ мы сказали, быть выведены только изъ двухъ, или трехъ, болѣе общихъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Въ предложеніяхъ 19, 20 и 21 рѣшены всѣ задачи о построеніи коническаго сѣченія, имѣющаго данный фокусъ и касающагося данныхъ прямыхъ, или проходящаго черезъ данныя точки. Но рѣшеніе всѣхъ подобныхъ вопросовъ непосредственно приводится теперь къ такимъ же вопросамъ о кругѣ, удовлетворяющемъ тремъ условіямъ, посредствомъ или теоріи гомологическихъ фигуръ, какъ это показалъ Понселе, или посредствомъ поляръ, какъ это указано нами. (*Annales de mathématiques*, t. XVIII.)

Леммы 17, 18 и 19 представляютъ свойство четыреугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, или теорему древ-

нихъ *ad quatuor lineas*. Мы показали, что эта теорема чрезвычайно легко выводится изъ предложенія, названнаго нами *ангармоническимъ свойствомъ* точекъ коническаго сѣченія. Свойство же это доказывается съ совершенною очевидностію безъ помощи всякаго другаго свойства коническихъ сѣченій. (См. Примѣчаніе XV).

Леммы 20 и 21 имѣютъ предметомъ образованіе коническихъ сѣченій посредствомъ пересѣченія двухъ прямыхъ, вращающихся около неподвижныхъ полюсовъ.

Въ первой изъ этихъ леммъ вращающіяся прямыя проводятся черезъ точки пересѣченія параллельныхъ сѣкущихъ съ двумя неподвижными прямыми. Объ этой теоремѣ мы упоминали, говоря о Де-Виттѣ, и указали частный случай ея въ сочиненіи Кавальери.

Если бы сѣкущія не были параллельны, а проходили бы черезъ одну точку, то получалась бы во всей общности теорема Маклорена и Брайкенриджа; мы видѣли, что она, изложенная въ иной формѣ, ведетъ къ теоремѣ Паскаля о шестиугольникѣ; въ Примѣчаніи XV показано, что она непосредственно выводится изъ ангармоническаго свойства точекъ коническаго сѣченія.

Въ 21 леммѣ вращающіяся прямыя суть стороны двухъ постоянныхъ по величинѣ угловъ, другія стороны которыхъ пересѣкаются на неизмѣняемой прямой. Этотъ способъ органическаго образованія коническихъ сѣченій изложенъ Ньютономъ также въ *Enumeratio linearum tertii ordinis* и въ *Arithmetica universalis*. Мы показали уже (въ томъ же Примѣчаніи), что этотъ способъ образованія, который доказывался всегда довольно длиннымъ путемъ, выводится необыкновенно легко, подобно предыдущему, изъ того же ангармоническаго свойства.

Леммы 23, 24 и 25 съ ихъ слѣдствіями представляютъ частные случаи общаго свойства четыреугольника, описаннаго около коническаго сѣченія,—свойства сходнаго съ общимъ свойствомъ вписаннаго четыреугольника и названнаго

нами *ангармоническимъ свойствомъ касательныхъ* коническаго сѣченія. (См Примѣчаніе XVI.)

3-е слѣдствіе 25-й леммы представляетъ слѣдующее прекрасное предложеніе, которое было потомъ доказано разными способами: «во всякомъ четыреугольникѣ, описанномъ около коническаго сѣченія, прямая проведенная черезъ средины діагоналей, проходитъ черезъ центръ кривой».

Многія предложенія относятся къ задачѣ о построеніи коническаго сѣченія по даннымъ пяти условіямъ, именно по даннымъ точкамъ и касательнымъ. Всѣ подобные вопросы, какъ извѣстно, рѣшаются теперь очень просто.

Лемма 22 служитъ къ преобразованію однихъ фигуръ въ другія того же рода. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ Ньютонъ ею пользуется для превращенія прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, въ прямыя параллельныя между собою съ цѣлію облегчить рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ. Въ третьей эпохѣ мы говорили объ этомъ пріемѣ и показали тамъ, что онъ есть ни что иное, какъ одинъ изъ способовъ перспективы. Намъ кажется, что замѣчаніе это можетъ облегчить пониманіе этого пріема.

16. Во всѣхъ предварительныхъ предложеніяхъ и ихъ слѣдствіяхъ Ньютонъ ограничивалъ свои изысканія только тѣмъ, что ему было рѣшительно необходимо для его великаго предпріятія. Но изъ самой сущности его предложеній видно, что еслибы онъ имѣлъ въ виду развитіе и усовершенствованіе теоріи коническихъ сѣченій, то эти предложенія привели бы его безъ труда къ естественному обобщенію полученныхъ уже имъ результатовъ, т.-е. къ болѣе общимъ свойствамъ коническихъ сѣченій.

Отъ него не ускользнуло бы также и то, что его способъ преобразованія фигуръ прилагается естественнымъ образомъ также къ фигурамъ трехъ измѣреній; тогда мы за цѣлые полтора вѣка ранѣе узнали бы то, что сдѣлано было только въ самое недавнее время; напримѣръ преобразованіе сферы во всякую поверхность втораго порядка, подобно тому, какъ

со временъ Дезарга и Паскаля преобразовываютъ помощію перспективы кругъ для открытія и изслѣдованія свойствъ коническихъ сѣченій.

Самъ Ньютонъ не имѣлъ въ виду подобныхъ обобщеній. Но они не могли бы остаться незамѣченными тѣми геометрами, которые захотѣли бы подумать надъ чисто-геометрическимъ отдѣломъ *Principia*; это обстоятельство ясно показываетъ, какъ мало послѣ того времени разработывалась геометрія.

17. Въ сочиненіи Ньютона дано было въ первый разъ распрямленіе эпициклоидъ. До тѣхъ поръ не было ничего писано объ этихъ знаменитыхъ кривыхъ, хотя онѣ, по свидѣтельству Лейбница, были изобрѣтены еще за десять лѣтъ до этого времени Ремеромъ. По словамъ Де-Лагира первое открытіе этихъ кривыхъ и употребленіе ихъ при построеніи зубчатыхъ колесъ восходитъ даже до Дезарга, геній котораго, мало цѣнимый въ настоящее время, былъ дѣйствительно достаточенъ для такаго важнаго и полезнаго открытія. Черезъ нѣсколько лѣтъ послѣ изданія сочиненія Ньютона появилось сочиненіе Де-Лагира *Traité géométrique des épicycloïdes*.

Прибавленіе. Эпициклоиды разсматривались еще въ самыя отдаленныя времена, потому что они играли важную роль въ астрономической системѣ Птоломея. Но характеръ и свойства этихъ кривыхъ, кажется, вовсе не изучались въ то время геометрическимъ путемъ. Альбертъ Дюреръ помѣстилъ ихъ въ число кривыхъ, которыя можно построить по точкамъ, и говорилъ, что онѣ могутъ быть полезны въ строительномъ искуствѣ; но онъ также не изучалъ ни одного свойства ихъ.

Первая эпициклоида, свойства которой были найдены, указана Карданомъ: это—линія, образуемая точкою окружности, катящейся по вогнутой сторонѣ другой окружности, имѣющей вдвое большій радіусъ; линія эта, какъ извѣстно, есть прямая. Карданъ доказалъ это предложеніе въ книгѣ подъ заглавіемъ: *Opus novum de proportionibus numerorum, motuum,* etc. (prop. 173, p. 186).

Потомъ въ 1678 году Гюйгенсъ нашелъ, что огибающая *отраженныхъ волнъ* при отраженіи параллельныхъ лучей отъ окружности есть эпициклоида, образуемая точкою окружности, катящейся

по вогнутой сторонѣ освѣщаемаго круга; при этомъ діаметръ первой окружности, вчетверо менѣе второй. Гюйгенсъ показалъ распрямленіе и квадратуру такой эпициклоиды (*Tractatus de lumine*, cap. VI).

Около того же времени Де-Лагиръ обнаружилъ, что каустическая Чирнгаузена при отраженіи кругомъ параллельныхъ лучей есть также эпициклоида, образуемая точкою круга, катящагося по выпуклой сторонѣ неподвижнаго круга, имѣющаго діаметръ вдвое большій.

Эта кривая есть развертка эпициклоиды Гюйгенса.

Вотъ, сколько мнѣ извѣстно, первыя эпициклоиды, нѣкоторыя геометрическія свойства которыхъ были изучены. Кривыя эти встрѣчались потомъ во многихъ другихъ вопросахъ физики и механики, гдѣ онѣ играютъ замѣтную роль.

18. Укажемъ еще въ книгѣ *Principia* на знаменитые *овалы*, которые изобрѣтены были Декартомъ, какъ кривыя, собирающія посредствомъ преломленія въ одинъ фокусъ всѣ лучи, исходящія изъ одной точки, подобно тому, какъ эллипсъ и гипербола собираютъ лучи параллельные [21]). Ньютонъ показываетъ очень просто, что эти кривыя представляютъ геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ окружностей находятся въ постоянномъ отношеніи. Это же самое видно изъ геометрическаго построенія Декарта и Гюйгенсъ прямо, безъ всякаго доказательства, получилъ такое же заключеніе изъ теоріи волнъ въ его трактатѣ о свѣтѣ.

Сдѣлаемъ здѣсь одно замѣчаніе о геометріи Декарта, замѣчаніе, котораго мы не имѣли случая высказать ранѣе. Геометрическое построеніе оваловъ удовлетворяло той цѣли, для которой знаменитый философъ назначалъ ихъ въ своей діоптрикѣ; но оно не было достаточно для полнаго изслѣдованія этихъ кривыхъ. Ни Робервалъ, который, спустя немного времени, далъ построеніе оваловъ и изслѣдовалъ ихъ формы, ни Гюйгенсъ, ни Ньютонъ не были вполнѣ знакомы съ этими кривыми съ геометрической точки зрѣнія. Дѣло

[21]) Это свойство коническихъ сѣченій, основывающееся на соотношеніи между фокусомъ и директрисою, показано также Декартомъ, который доказалъ его въ своей Діоптрикѣ.

въ томъ, что каждый оваль, взятый въ отдѣльности, не представлялъ вполнѣ того геометрическаго мѣста, которое удовлетворяетъ свойству, указанному Ньютономъ, или уравненію четвертой степени, найденному Декартомъ: это геометрическое мѣсто состоитъ всегда изъ совокупности двухъ *сопряженныхъ* оваловъ (conjuguées), нераздѣльныхъ другъ отъ друга въ аналитическомъ выраженіи.

Замѣчаніе это ускользнуло отъ Декарта, какъ въ его Геометріи, такъ и въ Діоптрикѣ, также какъ отъ другихъ названныхъ нами знаменитыхъ геометровъ. Оно могло быть опущено въ Діоптрикѣ, но должно было, по нашему мнѣнію, быть указано въ Геометріи. Отъ этого произошло, что одна изъ формъ этихъ кривыхъ укрылась отъ анализа Декарта; это именно случай, когда два сопряженные овала имѣютъ одну общую точку и образуютъ одну кривую съ двойною точкой; кривая въ этомъ случаѣ есть ничто иное, какъ *улиткообразная* Паскаля (*limaçon*). Такимъ образомъ эта замѣчательная кривая, представляющая, какъ извѣстно, въ одно и тоже время круговую эпициклоиду и конхоиду, отличается еще тѣмъ до сихъ поръ незамѣченнымъ свойствомъ, что она, какъ и всѣ овалы Декарта, имѣетъ *два фокуса*.

Въ послѣднее время овалы опять появились въ геометріи. Знаменитый астрономъ Гершель назвалъ ихъ *апланетическими линіями* [22]), имѣя въ виду употребленіе ихъ въ оптикѣ. Кетле открылъ въ нихъ особыя любопытныя свойства, которыя мы покажемъ въ Примѣчаніи XXI.

19. **Маклоренъ,** также какъ Ньютонъ, питалъ любовь къ чистой геометріи и также умѣлъ прилагать ее съ чрезвычайнымъ искуствомъ къ философскимъ изысканіямъ. Сочиненіе его *Treatise of fluxions* имѣло цѣлію показать связь и соотношеніе между способами Архимеда и Ньютона и доказать послѣдній способъ со всею строгостію греческой школы; въ этомъ сочиненіи мы находимъ множество синте-

[22]) Линіи *безъ аберраціи*.

тическихъ доказательствъ для разнообразныхъ вопросовъ механики и высшей геометріи; анализъ не могъ бы быть въ этомъ случаѣ ни проще, ни быстрѣе. Всѣ знаютъ съ какимъ изяществомъ и простотою рѣшилъ онъ этимъ путемъ важный вопросъ о видѣ земли; одного этого изслѣдованія достаточно, чтобы сдѣлать имя Маклорена безсмертнымъ.

Вопросъ состоялъ въ томъ, чтобы опредѣлить притяженіе эллипсоида вращенія на точки, лежащія внутри, или на поверхности. Изъ нѣкоторыхъ свойствъ коническихъ сѣченій Маклоренъ съумѣлъ извлечь средства, достаточныя для рѣшенія этого вопроса, всегда считавшагося самыми знаменитыми аналистами однимъ изъ труднѣйшихъ. Чтобы оцѣнить достоинство этого изслѣдованія и способа, употребленнаго Маклореномъ, мы приведемъ лучше всего мнѣніе высказанное объ этомъ предметѣ знаменитымъ Лагранжемъ. Замѣтивъ, что есть вопросы, въ которыхъ геометрическій способъ древнихъ представляетъ преимущества передъ анализомъ, Лагранжъ прибавляетъ: „Задача объ опредѣленіи притяженія эллиптическаго сфероида на точку, помѣщенную на самой поверхности, или внутри ея, принадлежитъ къ этому роду. Маклоренъ, первый, рѣшилъ эту задачу въ своемъ превосходномъ сочиненіи о приливѣ и отливѣ моря, увѣнчанномъ Парижскою Академіею Наукъ въ 1740 году; онъ слѣдовалъ методу чисто геометрическому, основанному исключительно на нѣкоторыхъ свойствахъ эллипса и эллиптическихъ сфероидовъ; и надобно признаться, что эта часть сочиненія Маклорена представляетъ превосходный образецъ геометріи, который можно сравнить съ самыми лучшими и геніальными сочиненіями, оставленными намъ Архимедомъ. Маклоренъ имѣлъ какое-то особое призваніе къ способу древнихъ и потому не удивительно, что онъ воспользовался имъ для рѣшенія упомянутаго нами вопроса; но намъ кажется необыкновеннымъ то, что такая важная задача не была и послѣ того рѣшена прямымъ аналитическимъ путемъ, особенно въ послѣднее время, когда анализъ вошелъ въ такое широкое и всеобщее употребленіе. Причину этого, кажется,

можно приписать только трудности вычисленій, необходимыхъ для рѣшенія этой задачи, когда она разсматривается съ чисто аналитической точки зрѣнія.... Въ настоящемъ мемуарѣ я хочу показать, что разсматриваемая задача не только не представляется недоступною анализу, но можетъ быть рѣшена аналитически, если не также просто, какъ путемъ синтеза, то по крайней мѣрѣ болѣе прямо и съ большею общностью и пр.“ [23]).

Большая общность заключалась въ вычисленіи притяженія трехоснаго эллипсоида вмѣсто эллипсоида вращенія, изслѣдованнаго Маклореномъ. Но это обобщеніе уже показано было Даламбертомъ и получено имъ путемъ чисто геометрическихъ соображеній, путемъ совершенно тѣмъ же, который указанъ былъ Маклореномъ [24]).

20. Въ другой части сочиненія Маклорена, о которой Лагранжъ ничего еще не говоритъ въ упомянутомъ нами первомъ мемуарѣ, обнаруживается дѣйствительное преимущество геометрическаго способа передъ анализомъ. Мы говоримъ о знаменитой теоремѣ объ эллипсоидахъ, главныя сѣченія которыхъ имѣютъ одни и тѣ же фокусы. Теорема эта заклю-

---

[23]) *Mémoires de l'Académie de Berlin.* 1773.

[24]) *Opuscules mathématiques.* 1773, t. VI, p. 165.

Прежде чѣмъ мы узнали, что Даламбертъ, идя по слѣдамъ Маклорена, дошелъ помощію чисто геометрическихъ соображеній до выраженія въ видѣ однократнаго интеграла притяженія трехоснаго эллипсоида на точку поверхности или внутри ея, мы сами старались найти такое же распространеніе теоремы Маклорена; разлагая тѣло на элементарные конусы, какъ это дѣлаль Лагранжъ, мы получили съ помощію одной геометріи, ту самую формулу въ квадратурахъ, которая выводится обыкновенно аналитически. Пріемъ нашъ заключается въ томъ, что мы геометрическими соображеніями замѣняемъ первое интегрированіе, выполняемое въ анализѣ; основаніемъ этому служитъ замѣчаніе, что сказанное интегрированіе соотвѣтствуетъ въ геометріи вычисленію площади эллипса, именно того, который получается отъ проложенія, на одну изъ трехъ главныхъ плоскостей эллипсоида, кривой пересѣченія этой поверхности съ конусомъ вращенія около оси перпендикулярной къ главной плоскости, имѣющимъ вершину въ центрѣ эллипсоида.

чается въ томъ, что притяженія, обнаруживаемыя такими двумя эллипсоидами на внѣшнюю точку, имѣютъ одинаковое направленіе и по величинѣ пропорціональны массамъ этихъ тѣлъ. Маклоренъ доказалъ только простѣйшій частный случай этой прекрасной теоремы, когда притягиваемая точка находится на одной изъ главныхъ осей обоихъ эллипсоидовъ (*Treatise of fluxions, art.* 653). Но и этотъ частный случай представлялъ столько затрудненій, что всѣ усилія Даламберта рѣшить его аналитически кончились тѣмъ, что великій геометръ призналъ теорему Маклорена невѣрною [25]); Лагранжъ же, доказавшій ее нѣсколько позднѣе, ограничился тѣмъ же частнымъ случаемъ [26]). Даламбертъ, чтобы поправить свою ошибку, предложилъ тогда еще три рѣшенія, но и онъ, какъ Лагранжъ, не пошелъ далѣе Маклорена [27]). Вскорѣ послѣ того Лежандръ сдѣлалъ шагъ въ этомъ вопросѣ, доказавъ теорему для случая, когда притягиваемая точка находится въ одной изъ главныхъ плоскостей эллипсоидовъ; подозрѣвая послѣ этого всю общность теоремы [28]), онъ аналитически доказалъ ее вполнѣ чрезъ нѣсколько лѣтъ въ мемуарѣ, который можетъ служить образцомъ побѣжденныхъ трудностей. Этотъ превосходный и глубоко ученый мемуаръ былъ бы еще болѣе богатъ интересными выводами, если бы Лежандръ показалъ геометрическое значеніе многихъ изъ формулъ, черезъ которые онъ долженъ былъ перейти, чтобы достигнуть до окончательнаго вывода теоремы [29]).

Послѣ того найдено было много доказательствъ теоремы Лежандра, изъ которыхъ мы укажемъ здѣсь на одно, получаемое синтетическимъ путемъ. Оно проистекаетъ изъ прекрасной теоремы Эйвори, помощію которой вычисленіе притяженія эллипсоида на внѣшнія точки приводится къ притяженіямъ на внутреннія точки. Различныя доказательства

---

[25]) *Opuscules mathématiques*, t. VI, p. 242.

[26]) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1774 et 1775.

[27]) *Opuscules mathématiques*, 1780, t. VII, p. 102.

[28]) *Mémoires des savans étrangers*, t. X.

[29]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1788.

теоремы Эйвори мало отличаются отъ предложеннаго самимъ знаменитымъ изобрѣтателемъ и основываются на нѣкоторыхъ преобразованіяхъ формулъ. Но теорема эта по своему характеру должна бы относиться къ геометрической теоріи притяженія эллипсоидовъ и потому можно желать, чтобы было найдено для нея болѣе синтетическое рѣшеніе, независимое отъ формулъ анализа.

Со стороны вычисленія вопросъ о притяженіи эллипсоидовъ рѣшенъ въ настоящее время вполнѣ, насколько это позволяютъ средства анализа, формулы притяженія приведены къ эллиптическимъ квадратурамъ, интегрированіе которыхъ въ конечномъ видѣ невозможно. Но разсматриваемый съ другой точки зрѣнія вопросъ этотъ далеко еще не исчерпанъ и поведетъ еще, безъ сомнѣнія, ко многимъ изысканіямъ и прекраснымъ открытіямъ [30]). Новѣйшія работы двухъ

[30]) Такъ напримѣръ хотя въ конечномъ видѣ невозможно опредѣлить по величинѣ или по направленію притяженія эллипсоида на разныя точки, но нельзя ли найти какихъ нибудь отношеній между притяженіями, или ихъ направленіями.

Но изъ множества вопросовъ, которые можно себѣ вообразить, есть одинъ, который, можно сказать, представляется самъ собою, и которымъ, кажется, не занимался ни одинъ изъ геометровъ, писавшихъ объ этомъ предметѣ. Извѣстно, что въ формулахъ, выражающихъ притяженіе на внѣшнюю точку, входитъ коэффиціентъ, неизвѣстный *a priori*, но зависящій отъ совершенно опредѣленнаго уравненія третьей степени; геометрическое значеніе этого коэффиціента извѣстно: онъ представляетъ одну изъ главныхъ осей эллипсоида, проходящаго черезъ притягиваемую точку и имѣющаго съ притягивающимъ эллипсоидомъ одни и тѣ же фокусы главныхъ сѣченій. Но приведеніе этого вопроса къ уравненію третьей степени есть аналитическій фактъ, котораго нельзя *a priori* предвидѣть изъ сущности вопроса; фактъ, который до сихъ поръ еще не разъясненъ. Онъ доказываетъ, что задача о притяженіи эллипсоида проистекаетъ изъ другой болѣе общей задачи, допускающей вообще три рѣшенія. Въ двухъ изъ этихъ рѣшеній два гиперболоида, одинъ съ одною, другой съ двумя полостями, проходящіе черезъ притягиваемую точку и имѣющіе съ даннымъ эллипсоидомъ общіе фокусы главныхъ сѣченій, должны играть ту же роль, какую эллипсоидъ, проходящій черезъ эту же точку, играетъ въ первомъ рѣшеніи, относящимся къ задачѣ о притяженіи.

знаменитыхъ аналистовъ Франціи и Кенигсберга, Пуассона и Якоби, доказываютъ, что многое еще остается сдѣлать; они привлекутъ новое вниманіе на этотъ предметъ, исполненный высокаго интереса.

21. Задача о притяженіи эллипсоидовъ, разсматриваемая независимо отъ многихъ приложеній ея къ вопросамъ философіи природы, принадлежитъ къ геометріи и рѣшеніе ея, данное Маклореномъ, представляетъ одно изъ изслѣдованій, наиболѣе способныхъ возбудить любовь и интересъ къ чистой наглядной геометріи, такъ мало извѣстной уже около вѣка. Надѣемся, что по этой причинѣ намъ извинятъ подробности, въ которыя мы вошли по этому поводу и которыя отвлекли насъ отъ разбора геометрическихъ изслѣдованій Маклорена; мы укажемъ теперь, на какихъ свойствахъ коническихъ сѣченій основывалъ Маклоренъ свое рѣшеніе предъидущей задачи, и такимъ образомъ снова возвратимся къ нашему предмету.

Одного свойства достаточно для вычисленія притяженія на точку поверхности, или на точку внутреннюю, именно:

«Даны два подобные, подобно расположенные и концентрическіе эллипса; черезъ вершину меньшаго изъ нихъ «проводимъ касательную, которая пересѣчется съ другимъ «эллипсомъ въ двухъ точкахъ.

«Черезъ одну изъ этихъ двухъ точекъ проводимъ во второмъ эллипсѣ двѣ хорды, одинаково наклоненныя къ вышесказанной касательной.

„Чрезъ вершину перваго эллипса проводимъ двѣ его „хорды, параллельныя хордамъ другаго эллипса.

„Сумма этихъ хордъ равна суммѣ двухъ другихъ.

Маклоренъ доказываетъ эту теорему для круга помощію начальной геометріи; пролагая потомъ оба эллипса на плоскость параллельную разсматриваемой касательной и накло-

---

Подобныя обстоятельства встрѣчаются въ анализѣ нерѣдко и всегда интересно знать ихъ происхожденіе и значеніе. Только при этомъ можно считать вопросъ окончательно разрѣшеннымъ.

ненную такъ, чтобы проложенія были кругами, онъ выводитъ и самую теорему [31]).

22. Вычисленіе притяженія на внѣшнюю точку было не такъ просто: Маклоренъ употреблялъ для этого два предложенія, изъ которыхъ онъ самъ изложилъ только одно, другое же вытекаетъ изъ доказательства перваго; именно:

„1) Представимъ себѣ два эллипса, описанные изъ однихъ „и тѣхъ же фокусовъ; если черезъ точку, взятую на одной „изъ главныхъ осей, проведемъ двѣ сѣкущія такъ, чтобы ко„синусы угловъ ихъ съ другою осью были пропорціональны „діаметрамъ эллипсовъ по направленію этой оси, то отрѣзки „сѣкущихъ, заключающіеся между двумя кривыми, будутъ „соотвѣтственно пропорціональны діаметрамъ по направле„нію первой оси.

„2) Если въ двухъ эллипсахъ, описанныхъ изъ однихъ и „тѣхъ же фокусовъ, проведемъ два какіе-нибудь діаметра, „оканчивающіеся въ *соотвѣтственныхъ* точкахъ этихъ кри„выхъ, то разность квадратовъ ихъ будетъ величина постоянная“.

Соотвѣтственными точками мы называемъ такія, разстоянія которыхъ отъ главныхъ осей пропорціональны діаметрамъ обоихъ эллипсовъ, перпендикулярныхъ соотвѣтственно этимъ осямъ.

Маклорену было достаточно перваго изъ этихъ предложеній для доказательства, что притяженія двухъ однофокусныхъ эллипсоидовъ вращенія на точку, взятую на продолженіи оси вращенія, относятся какъ массы эллипсоидовъ. Отсюда, при помощи втораго предложенія, онъ заключаетъ, что таже теорема справедлива для всѣхъ внѣшнихъ точекъ,

---

[31]) Маклоренъ пользовался единственно этою теоремою, чтобы доказать важное предложеніе, принятое Ньютономъ безъ доказательства, именно: *однородная жидкая вращающаяся масса должна принимать видъ эллипсоида вращенія при дѣйствіи притяженія обратно пропорціонально квадратамъ разстояній.* Клеро считалъ это доказательство настолько хорошимъ, что въ *Théorie de la figure de la terre* онъ оставилъ аналитическій способъ и послѣдовалъ пути Маклорена.

находящихся въ плоскости экватора обоихъ сфероидовъ. Затѣмъ онъ замѣчаетъ, что доказательство второй теоремы прилагается также къ однофокуснымъ эллипсоидамъ съ тремя неравными осями, если притягиваемая точка лежитъ на продолженіи одной изъ осей; отсюда и проистекаетъ та знаменитая теорема, о которой мы говорили выше.

Даламбертъ и впослѣдствіи Лагранжъ и Лежандръ думали, что Маклоренъ только высказалъ свою теорему, но не далъ ея доказательства; это—ошибка со стороны трехъ знаменитыхъ геометровъ, потому что доказательство здѣсь совершенно тожественно съ предъидущимъ и авторъ ограничился поэтому, какъ и слѣдовало, словами: *такимъ же образомъ докажемъ и т. д.*; не было надобности повторять разсужденія, изложенныя нѣсколькими строками выше, и въ которыхъ не нужно было ни измѣнять, ни прибавлять, ни выкидывать ни одного слова. [32]).

---

[32]) Заблужденіе трехъ названныхъ мною великихъ геометровъ никѣмъ еще, кажется, не было замѣчено, хотя съ тѣхъ поръ очень много занимались вопросомъ о притяженіи эллипсоидовъ. Я замѣчаю это потому, что это представляетъ ясное доказательство того, что геометрія во второй половинѣ послѣдняго вѣка была совершенно оставлена и что весьма несправедливо было бы теперь обвинять ее въ безсиліи, такъ какъ на этомъ пути не только не дѣлалось никакихъ новыхъ усилій, но даже достаточно не изучались превосходные способы, которые повели Ньютона и Маклорена къ ихъ великимъ открытіямъ. Напротивъ того, переведя эти способы на анализъ, приписывали анализу же великія открытія Ньютона, предполагая, что онъ уже послѣ облекъ ихъ въ геометрическую форму. Это предположеніе произвольно; оно доказываетъ незнакомство съ богатствомъ средствъ геометріи и съ необычайною легкостію ея умозаключеній, которыя иногда бываютъ до очевидности просты въ вопросахъ, доступныхъ по преимуществу геометрическимъ пріемамъ. Мы не будемъ входить въ разсужденія о характерѣ и средствахъ этого геометрическаго способа; для этого нуженъ бы былъ болѣе искусный защитникъ; достаточно будетъ напомнить, что приписывая открытія Ньютона аналитическому способу, мы должны допустить, что геометръ этотъ употреблялъ *исчисленіе варіацій*, открытіемъ котораго мы обязаны Лагранжу. Возможно ли допустить, чтобы великій Ньютонъ съ его глубокимъ умомъ и съ его вѣрнымъ и широ-

23. Два изложенныя нами свойства эллипсовъ, описанныхъ изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, принадлежатъ самому Маклорену; вѣроятно это были первыя предложенія объ однофокусныхъ коническихъ сѣченіяхъ, также какъ въ его теоремѣ о притяженіи эллипсоидовъ, главныя сѣченія которыхъ имѣютъ одинаковые фокусы, въ первый разъ говорится о такихъ эллипсоидахъ. Эти поверхности нѣсколько лѣтъ спустя встрѣтились въ другихъ вопросахъ и въ настоящее время онѣ, по нашему мнѣнію, должны играть важную роль въ поверхностяхъ втораго порядка. Онѣ обладаютъ множествомъ еще незамѣченныхъ свойствъ, о которыхъ мы будемъ говорить въ Примѣчаніяхъ къ пятой эпохѣ.

24. Маклоренъ доказываетъ свойства эллипса, разсматривая его какъ косвенное сѣченіе круглаго цилиндра, и выводитъ ихъ изъ свойствъ круга. Онъ не ограничился упомянутыми нами предложеніями; усвоивъ себѣ этотъ весьма удобный способъ, онъ желалъ распространить его приложенія далѣе Маркиза Лопиталя, который еще прежде указалъ этотъ способъ въ концѣ своего аналитическаго трактата о коническихъ сѣченіяхъ (кн. VI). На немногихъ страницахъ Маклоренъ съ чрезвычайною простотою доказалъ главныя свойства эллипса. Здѣсь находимъ естественное и болѣе краткое, чѣмъ у Ньютона, изслѣдованіе задачи о цен-

кимъ взглядомъ могъ не замѣтить особенности и чрезвычайной важности такого открытія, чтобы онъ умолчалъ объ немъ и не воспользовался имъ впослѣдствіи во время тяжелой и ожесточенной борьбы его съ Лейбницемъ? Если такъ, то ему не зачѣмъ бы было писать и исчисленіе флюксій. Притомъ, приписывая анализу открытія Ньютона, слѣдуетъ, чтобы быть послѣдовательнымъ и дѣлать заключенія о безсиліи геометрическаго способа, тоже самое сказать о трудахъ Маклорена, Стеварта и даже о знаменитой формулѣ Ламберта, которую самъ Лагранжъ призналъ лучшимъ и наиболѣе важнымъ открытіемъ во всей теоріи кометъ, хотя она получена была изъ соображеній чисто геометрическихъ.

Оставимъ же геометріи ея дѣло. Анализъ имѣетъ уже достаточно блестящія пріобрѣтенія и достаточно богатую будущность, чтобы искренне сочувствовать прежнимъ успѣхамъ своей старшей сестры.

тральной силѣ для эллипса, когда притягивающая точка имѣетъ какое бы то ни было положеніе въ плоскости кривой: изъ этого изслѣдованія непосредственно видно, что притяженіе будетъ прямо пропорціонально разстоянію, когда притягивающая точка находится въ центрѣ эллипса, и обратно пропорціональна квадрату разстоянія, когда она лежитъ въ фокусѣ кривой.

По поводу *Treatise of fluxions* Маклорена можно было бы сдѣлать много подобныхъ же замѣчаній, относящихся къ исторіи развитія геометріи; но мы и безъ того уже перешли за предѣлы, указываемые назначеніемъ нашего труда; поэтому оканчиваемъ здѣсь обозрѣніе трудовъ этого великаго геометра.

25. **Р. Симсонъ** (1687—1768). Робертъ Симсонъ, о которомъ мы имѣли уже случай упоминать нѣсколько разъ, есть одинъ изъ геометровъ предшествующаго столѣтія, наиболѣе изучавшихъ геометрію древнихъ и наиболѣе способствовавшихъ ея распространенію. Большое сочиненіе его о коническихъ сѣченіяхъ въ пяти книгахъ написано въ строгомъ стилѣ Аполлонія, въ стилѣ, который въ то время начинали уже оставлять для исключительно аналитическаго способа. Сочиненіе это есть первое, въ которомъ включены были двѣ знаменитыя теоремы Дезарга и Паскаля. Въ немъ находимъ также теорему *ad quatuor lineas*; но эта теорема появилась еще раньше въ сочиненіи о коническихъ сѣченіяхъ Milnes'a [33]), который заимствовалъ ее изъ *Principia* Ньютона.

---

[33]) *Sectionum conicarum elementa nova methoda demonstrata;* Oxoniae, 1702. Сочиненіе это написанное, какъ признается въ предисловіи самъ авторъ, въ подражаніе большему трактату Де-Лагира, имѣло большой успѣхъ и много изданій. Въ немъ коническія сѣченія разсматривались какъ сѣченія круглаго конуса совершенно произвольною плоскостію, безъ пособія осеваго треугольника. Впрочемъ методъ кажется намъ менѣе удаченъ, чѣмъ у Де-Лагира, потому что онъ заключался въ предварительномъ доказательствѣ нѣкоторыхъ частныхъ свойствъ гипер-

Только то обстоятельство, что въ сочиненіи Симсона заключаются три упомянутыя нами основныя теоремы, и даетъ этому сочиненію нѣкоторое преимущество передъ большимъ трактатомъ Де-Лагира; относительно же метода послѣднее сочиненіе кажется намъ несравненно выше; оно представляло замѣтное улучшеніе древнихъ способовъ, тогда какъ сочиненіе Симсона въ этомъ отношеніи замѣтно отстало.

Въ самомъ дѣлѣ, Симсонъ, по образцу небольшаго трактата Де-Лагира 1679 года и по образцу Лопиталя, разсматриваетъ коническія сѣченія въ плоскости, опредѣляя каждое особымъ частнымъ свойствомъ. Параболу—равенствомъ разстояній каждой точки отъ фокуса и директрисы; эллипсъ и гиперболу—постоянною суммою и разностію разстояній точекъ этихъ кривыхъ отъ двухъ фокусовъ. Изъ этихъ опредѣленій трехъ кривыхъ Симсонъ выводитъ важнѣйшія свойства каждой изъ нихъ и потомъ показываетъ, что эти кривыя одинаковы съ тѣми, которыя Аполлоній получалъ на косомъ конусѣ при помощи осеваго треугольника.

Изучивъ такимъ образомъ три вида коническихъ сѣченій въ трехъ первыхъ книгахъ своего сочиненія, Симсонъ только въ двухъ слѣдующихъ книгахъ разсматриваетъ коническія сѣченія въ совокупности и въ общемъ видѣ и доказываетъ множество ихъ общихъ свойствъ.

Теорема *ad quatuor lineas* есть 28-е предложеніе его четвертой книги; шестиугольникъ Паскаля—47-е пятой книги; теорема Дезарга доказана въ предложеніяхъ 12 и 49 той же книги. Симсону была неизвѣстна близская связь этихъ трехъ теоремъ, составляющихъ, можно сказать, различныя выраженія одного и того же общаго свойства коническихъ сѣченій.

болы, которыя служили основаніемъ для перехода къ свойствамъ эллипса.

Всѣ доказательства въ этомъ сочиненіи чисто синтетическія и чрезвычайно просты; для нашего времени чтеніе становится утомительнымъ вслѣдствіе безпрестаннаго употребленія пропорцій въ древней формѣ: было бы болѣе удобно и болѣе разумно замѣнить эту форму равенствомъ отношеній.

Но онъ умѣлъ оцѣнить всю пользу двухъ послѣднихъ теоремъ: онъ показалъ, что изъ одной изъ нихъ выводится вся теорія полюсовъ, изъ другой же вывелъ шесть слѣдствій и прибавилъ къ этому, что въ двухъ сказанныхъ теоремахъ заключается общее доказательство большинства предложеній первой книги *Principia* Ньютона.

Жаль, что Симсонъ не воспользовался этимъ счастливымъ замѣчаніемъ и не заключилъ въ одномъ общемъ предложеніи и въ одномъ доказательствѣ множество отдѣльныхъ частныхъ теоремъ, для которыхъ имъ были даны еще прежде многочисленныя и разнородныя доказательства. Это—единственное средство упростить теорію коническихъ сѣченій, облегчить и распространить знакомство съ нею и употребленіе ея и подготовить для нея новыя пріобрѣтенія.

26. Мы не будемъ здѣсь останавливаться на его знаменитомъ трактатѣ о поризмахъ, гдѣ въ первый разъ опредѣлена сущность этихъ предложеній, составлявшихъ до тѣхъ поръ неразрѣшимую загадку для самыхъ ученыхъ геометровъ; объ этомъ мы говорили уже подробно въ статьѣ объ Евклидѣ и въ Примѣчаніи III.

Возстановленная Симсономъ книга *de sectione determinata* помѣщена въ одномъ томѣ съ его поризмами.

Онъ возстановилъ также *loca plana* Аполлонія [34]) точнѣе и вѣрнѣе, чѣмъ Шутенъ и Ферматъ.

Онъ приготовилъ еще новый переводъ сочиненій Паппа, найденый между рукописями, завѣщанными имъ Глазговской коллегіи; жаль, что переводъ этотъ не былъ никогда изданъ, такъ какъ онъ представляетъ работу, далеко не такъ легкую, какъ прежде думали, и требовавшую глубокихъ познаній въ древней геометріи. Никто не могъ бы выполнить этотъ трудъ съ такимъ знаніемъ и искусствомъ, какъ ученый Симсонъ. Удивительно, что соотечественники его не озаботились этимъ изданіемъ и что въ этомъ случаѣ благородный примѣръ

[34]) *Apollonii Pergaei locorum planorum, libri II restituti;* in—4^{0} Glosguae, 1749.

лорда Стенгопа, издавшаго поризмы и *de sectione determinata*, не нашелъ себѣ подражателя въ отечествѣ Ньютона, гдѣ древняя геометрія насчитывала всегда много достойныхъ и знаменитыхъ почитателей.

27. **Стевартъ** (Стюартъ, Mathieu Stewart, 1717—1785). Стевартъ, ученикъ Симсона и Маклорена въ Глазговской Коллегіи и потомъ въ Эдинбургскомъ университетѣ, заимствовалъ отъ своихъ учителей любовь къ геометріи древнихъ и, какъ они, обязанъ былъ ей своею знаменитостію. Первое сочиненіе его *о нѣкоторыхъ общихъ теоремахъ употребляемыхъ въ высшей математикѣ* (написано по-англійски, in—8°, 1746) поставило его сразу на почетное мѣсто между геометрами, и черезъ нѣсколько времени доставило ему каѳедру математики послѣ смерти Маклорена. Благодаря характеру обязанностей и направленію первыхъ трудовъ, Стеварту можно было въ особенности заниматься геометрическимъ методомъ и онъ предполагалъ приложить этотъ методъ къ труднѣйшимъ вопросамъ физической астрономіи, которые интересовали въ то время ученыхъ и, по мнѣнію ихъ, считались доступными только для самаго высшаго анализа. Такимъ образомъ Стевартъ имѣлъ намѣреніе продолжать труды Ньютона и Маклорена относительно вопросовъ о системѣ міра, вопросовъ, которые вслѣдствіе естественнаго прогресса въ наукѣ сдѣлались многочисленнѣе и сложнѣе, чѣмъ во время этихъ двухъ великихъ геометровъ. Съ подобною цѣлью Стевартъ въ 1761 году издалъ сочиненіе *Tracts physical and mathematical, etc.* т.-е. „Трактаты по физикѣ и математикѣ, „содержащіе изъясненія многихъ важныхъ вопросовъ физи„ческой астрономіи и новый способъ опредѣленія разстоянія „земли отъ солнца помощію теоріи тяготѣнія.“ Болѣе обширная теорія центростремительныхъ силъ, вычисленія разстоянія земли отъ солнца и весьма трудная задача о трехъ тѣлахъ, т.-е. вычисленіе заимодѣйствія между солнцемъ, землею и луною—вотъ важнѣйшіе вопросы, рѣшенные Стевартомъ въ этомъ сочиненіи при помощи только элементовъ плоской геометріи и теоріи коническихъ сѣченій. Порядокъ

и ясность въ изложеніи предложеній, простота ихъ доказательства и трудность вопросовъ, разрѣшенныхъ при ихъ помощи, все это заслужило Стеварту большія похвалы и заставило считать его однимъ изъ самыхъ глубокихъ геометровъ того времени. Впрочемъ мы должны замѣтить, что его вычисленіе разстоянія земли отъ солнца было ошибочно. Причина ошибки была открыта и разъяснена сперва Даусономъ (Dawson) въ 1769 году [35]), потомъ Ланденомъ въ 1771 [36]). Ошибка проистекала не отъ способа изслѣдованія, но отъ пренебреженія нѣкоторыми количествами, сдѣланнаго ошибочно въ видахъ упрощенія. Впослѣдствіи изъ этого обстоятельства сдѣлали возраженіе противъ геометрическаго метода; но чтобы это возраженіе о провергнуть, достаточно припомнить, сколько подобныхъ ошибокъ сдѣлано было знаменитѣйшими аналистами и какъ онѣ обыкновенны, особенно въ астрономіи, гдѣ анализъ можетъ идти только путемъ послѣдовательныхъ приближеній.

28. Мы должны упомянуть еще объ одномъ сочиненіи Стеварта по чистой геометріи, именно: *Propositiones geometricae, more Veterum demonstratae, at Geometriam antiquam illustrandam et promovendam idoneae*. Edimb. 1763, in—8°.

Мы должны войти въ нѣкоторыя подробности, чтобы ознакомить читателей съ этимъ сочиненіемъ Стеварта, также какъ съ его *Общими теоремами*, которыя были изданы девятнадцатью годами ранѣе. Такъ какъ обѣ книги очень рѣдки, то разборъ и изложеніе заключающихся въ нихъ теоремъ не будетъ, намъ кажется, излишнимъ.

Книга объ общихъ теоремахъ содержитъ шестьдесятъ четыре предложенія, изъ которыхъ только пятьдесятъ названы теоремами. Изъ остальныхъ четырнадцати три находятся въ

---

[35]) *Four Propositions etc.* т. е. четыре предложенія, служащія для доказательства, что опредѣленіе Стевартомъ разстоянія земли отъ солнца ошибочно.

[36]) *Animadversions on Dr. Stewarts computation of the sun's distance from the earth;* in—8° London.

началѣ сочиненія и служатъ для доказательства теоремъ; послѣдними же одиннадцатью, выражающими большею частію различныя свойства круга, оканчивается книга.

Изъ всѣхъ шестидесяти четырехъ предложеній доказано только восемь первыхъ и въ томъ числѣ пять первыхъ теоремъ. Въ краткомъ предисловіи авторъ объявляетъ, что для изложенія доказательства всѣхъ теоремъ, столь общихъ и трудныхъ, ему нужно бы было болѣе времени, нежели сколько онъ на это можетъ посвятить. Мнѣ неизвѣстно, были ли впослѣдствіи возстановлены доказательства Стеварта, или они были найдены въ его бумагахъ и какое въ такомъ случаѣ сдѣлано изъ нихъ употребленіе.

Два первыя предложенія выражаютъ общія свойства четырехъ точекъ, изъ которыхъ три находятся на прямой линіи, а четвертая имѣетъ произвольное положеніе. Во второмъ предложеніи четвертая точка можетъ быть взята также и на самой прямой. Вотъ это предложеніе, которое, кажется, извѣстно менѣе, чѣмъ заслуживаетъ:

Если возьмемъ три точки A, C, B на прямой линіи и еще какую нибудь точку D внѣ прямой, или опять на ней, то будемъ имѣть:

$$DA^2.BC+DB^2.AC-DC^2.AB=AB.AC.BC.$$

Мы уже говорили, что изъ этого предложенія могутъ быть выведены, какъ простыя слѣдствія, восемь леммъ Паппа къ *loca plana* Аполлонія. Вскорѣ послѣ появленія этой теоремы въ сочиненіи Стеварта Робертъ Симсонъ извлекъ изъ нея удачное примѣненіе въ прибавленіи къ *Loca plana restituta* и другой извѣстный геометръ, Томасъ Симпсонъ, также доказалъ ее и воспользовался какъ леммою для рѣшенія многихъ задачъ въ изданныхъ имъ упражненіяхъ для учащихся математикѣ [37]). Позднѣе ту же теорему доказалъ Эйлеръ,

---

[37]) *Select exercises for young proficients in the mathematicks;* in—8°, 1752.

какъ лемму при рѣшеніи задачи о вписанномъ въ кругъ треугольникѣ, стороны котораго проходятъ черезъ три данныя точки [38]). Наконецъ извѣстный физикъ и геометръ Лесли также доказалъ и употреблялъ эту теорему въ третьей книгѣ своего *Геометрическаго анализа* [39]).

Изъ сказаннаго нами видно, что теорема эта, почти совсѣмъ неизвѣстная въ наше время, имѣетъ право занять мѣсто въ элементахъ, или по крайней мѣрѣ въ дополненіяхъ къ геометріи[40]).

Двѣ первыя части этого сочиненія представляютъ обширный сборникъ задачъ по алгебрѣ и геометріи, рѣшенныхъ весьма изящнымъ образомъ. Онѣ были переведены на французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Elémens d'analyse pratique, ou application des principes de l'Algèbre et de la Géométrie, à la solution d'un très-grand nombre de problèmes numériques et géométriques;* in—8⁰, 1771.

[38]) *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg,* 1780.

[39]) *Geometrical analysis.* Edinburgh, 1809; in—8⁰. Второе изданіе въ 1821 году.

[40]) Когда точка D взята на той же прямой, на которой лежатъ три остальныя точки, то теоремою Стеварта выражается общее соотношеніе между четырьмя произвольными точками прямой линіи. Мы нашли что это соотношеніе, также какъ и другія, относящіяся къ четыремъ точкамъ прямой, проистекаютъ изъ слѣдующаго общаго соотношенія между пятью точками прямой линіи:

$$EA^2.BC.CD.DB+EB^2.CD.DA.AC-$$

$$-EC^2.DA.AB.BD-ED^2.AB.BC.CA=0.$$

Составленіе членовъ этого уравненія—очевидно. Чтобы опредѣлить знаки, раздѣлимъ всѣ члены на $AB.\,BC.\,CA$; уравненіе обратится въ

$$EA^2\,\frac{DB.DC}{AB.AC}+EB^2.\,\frac{DA.DC}{BA.BC}-EC^2.\,\frac{DA.DB}{CA.CB}=ED^2;$$

въ этомъ уравненіи надобно брать съ $+$ произведенія отрѣзковъ, которые считаются въ одномъ направленіи отъ общей ихъ точки, и съ $-$ произведенія отрѣзковъ, считаемыхъ въ противоположныя стороны.

Вотъ нѣкоторыя соотношенія между четырьмя точками, выводимыя изъ этого общаго соотношенія.

1) Если предположимъ, что E находится въ безконечности, то, раздѣливъ на ED^2, получимъ.

Почти всѣ пятьдесятъ теоремъ Стеварта могутъ быть включены въ слѣдующія четыре болѣе общія предложенія, изъ которыхъ всѣ другія вытекаютъ, какъ слѣдствія.

1. *Положимъ, что около круга радіуса R описанъ правильный многоугольникъ, имѣющій m сторонъ и пусть n будетъ число меньшее m.*

Если изъ какой нибудь точки (взятой внутри многоугольника, если n нечетное, и гдѣ угодно, если n четное) опустимъ перпендикуляры на стороны многоугольника, то сумма n-ыхъ степеней ихъ будетъ равна

$$m.\left(R^n+Av^2R^{n-2}+Bv^4R^{n-4}+Cv^6R^{n-6}+ \text{ и. т. д.}\right),$$

гдѣ v есть разстояніе точки отъ центра круга; A есть коэффиціентъ третьяго члена бинома, возвышеннаго въ степень n, умноженный на $\frac{1}{2}$; B—коэффиціентъ пятаго члена, умноженный на $\frac{1.3}{2.4}$; C—коэффиціентъ седьмаго члена, умноженный на $\frac{1.3.5}{2.4.6}$; и. т. д. (Предл. 40).

$$A=\frac{n(n-1)}{2^2}$$

$$BC.CD.DB+CD.DA.AC-DA.AB.BD-AB.BC.CA=0.$$

Каждый членъ этого уравненія есть произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ тремя изъ четырехъ точекъ.

2) Если точки E и D сливаются, то выходитъ

$$DA.BC+DB.AC-DC.AB=0;$$

это—простѣйшее соотношеніе между четырьмя точками A, B, C, D прямой линіи.

3) Наконецъ, если D будетъ въ безконечности, то общее уравненіе обращается въ уравненіе Стеварта, именно:

$$EA^2.BC+EB^2.AC-EC^2.AB+AB.BC.CA.$$

$$B = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 . 4^2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2 . 4^2 . 6^2}$$

и. т. д.

Если точка, изъ которой опускаются перпендикуляры, взята на окружности, то формула обращается въ

$$m . \frac{1.3.5.7 \ldots . (2n-1)}{1.2.3.4 \ldots . \quad n} R^n . \text{ (Предл. 39).}$$

Въ этой общей теоремѣ заключаются предложенія 3, 5, 22, 23, 28, 29 и 45.

2. *Положимъ, что въ кругѣ радіуса R вписанъ правильный многоугольникъ, имѣющій m сторонъ, и пусть n будетъ число меньшее m;*

Если возьмемъ произвольно точку на разстояніи v отъ центра круга, то сумма 2n-ыхъ степеней разстояній этой точки отъ вершинъ многоугольника будетъ равна

$$m(R^{2n} + a^2v^2R^{2n-2} + b^2v^4R^{2n-4} + c^2v^6R^{2n-6} + \text{ и т. д.}),$$

гдѣ a есть коэффиціентъ втораго члена бинома, возвышеннаго въ степень n; b—коэффиціентъ третьяго члена; c—четвертаго и т. д. (Предл. 42).

Если точка взята на окружности, то формула обращаетя въ

$$m . \frac{1.3.5.7 \ldots . (2n-1)}{1.2.3.4 \ldots . \quad n} 2^n R^{2n} . \text{ (Предл. 41).}$$

Въ этой общей теоремѣ заключаются предложенія 4, 36, 27 и 34.

3. *Даны, гдѣ угодно, m точекъ и столько-же количествъ a, b, c...; пусть будетъ n число меньшее m; можно найти n+1 другихъ точекъ такъ, чтобы сумма помноженныхъ соотвѣтственно на a, b, c... 2n-ыхъ степеней разстояній какой угодно точки отъ данныхъ точекъ находилась съ суммою 2n-ыхъ*

степеней разстояній той же точки отъ найденныхъ точекъ въ отношеніи

$$(a+b+c+....) : (n+1) \text{ (Предл. 44).}$$

Въ этой теоремѣ заключаются предложенія 11, 12, 32, 33, 43.

4. *Даны* m *какихъ нибудь прямыхъ и столько же количествъ* a, b, c...; *пусть* n *будетъ число меньшее* m; *можно всегда найти* $n+1$ *другихъ прямыхъ такъ, чтобы сумма помноженныхъ соотвѣтственно на* a, b, c... n*-ыхъ степеней разстояній произвольной точки отъ данныхъ прямыхъ находилась съ суммою* n*-ыхъ степеней разстояній той же точки отъ найденныхъ прямыхъ въ отношеніи*

$$(a+b+c+....) : (n+1). \text{ (Предл. 49 и 53).}$$

Эта теорема заключаетъ въ себѣ предложенія 17, 21, 24, 25, 37, 38, 42, 50, 51, 52.

29) Мы нашли, что изложеніе двухъ послѣднихъ теоремъ можно представить въ болѣе общемъ и довольно любопытномъ видѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ соотношеніемъ между $2n$-ыми степенями разстояній произвольной точки отъ данныхъ и найденныхъ точекъ, соотношеніемъ, которое составляетъ первую изъ этихъ теоремъ, существуетъ еще подобное же соотношеніе между степенями $2(n-\delta)$ тѣхъ же разстояній, при чемъ δ можетъ имѣть всѣ величины 0, 1, 2.... $(n-1)$; такимъ образомъ между разстояніями произвольной точки отъ данныхъ и найденныхъ точекъ будетъ существовать n соотношеній. Въ теоремѣ Стеварта указывается только одно изъ нихъ.

Послѣднее изъ такихъ соотношеній будетъ имѣть мѣсто между квадратами разстояній. Оно показываетъ, что найденныя точки имѣютъ одинъ центръ тяжести съ данными точками, если въ послѣднихъ предположимъ массы a, b, c..., массы же въ найденныхъ точкахъ предположимъ равными.

Подобнымъ же образомъ во второй теоремѣ, представляющей соотношеніе между n-ыми степенями разстояній какой

нибудь точки отъ данныхъ и найденныхъ прямыхъ, мы будемъ имѣть подобное же соотношеніе между $(n-2\delta)$ степенями разстояній; при чемъ δ можетъ имѣть всѣ величины 0, 1, 2... до $\frac{n-1}{2}$, когда n нечетное, и до $\frac{n-2}{2}$, когда n четное. Такимъ образомъ между разстояніями произвольной точки отъ данныхъ и найденныхъ прямыхъ будетъ существовать $\frac{n-1}{2}$, или $\frac{n-2}{2}$, различныхъ соотношеній вмѣсто одного, заключающагося въ теоремѣ Стеварта. (См. Примѣчаніе XXII).

30. Мы нашли также, что двѣ первыя изъ приведенныхъ выше теоремъ относительно правильныхъ многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ представляютъ частные случаи подобныхъ же теоремъ для коническихъ сѣченій; онѣ ведутъ ко множеству свойствъ этихъ кривыхъ и эти свойства кажется не были еще до сихъ поръ замѣчены. Проистекающія отсюда многочисленныя теоремы являются въ нѣкоторомъ смыслѣ любопытными обобщеніями извѣстныхъ свойствъ сопряженныхъ діаметровъ и радіусовъ векторовъ, проводимыхъ въ фокусы.

Запасъ разнообразныхъ свойствъ коническихъ сѣченій кажется неистощимымъ. Всякій день открываются новые пути для ихъ изученія. Не должно думать, что подобныя изысканія праздны или имѣютъ мало интереса. Каждое открытіе въ этой области есть предвѣстникъ болѣе важныхъ и общихъ открытій, которыя увеличиваютъ значеніе коническихъ сѣченій во всѣхъ отдѣлахъ математики и даютъ возможность открывать аналогичныя свойства во множествѣ кривыхъ высшихъ порядковъ,—свойства, до которыхъ трудно было бы дойти, изслѣдуя прямо эти весьма сложныя и трудно изучаемыя кривыя.

31. *Propositiones geometricae* Стеварта состоятъ изъ двухъ книгъ: въ первой содержится шестьдесятъ, во второй—пятьдесятъ два предложенія.

Всѣ они относятся къ прямой линіи и кругу.

Въ первыхъ предложеніяхъ выражается общее свойство четыреугольника, доказанное Паппомъ въ леммахъ къ поризмамъ Евклида: *всякая прямая встрѣчаетъ четыре стороны и двѣ діагонали четыреугольника въ шести точкахъ образующихъ инволюцію.*

Въ Примѣчаніи X сказано, что это соотношеніе можетъ быть выражено помощію шести или помощію восьми отрѣзковъ. Соотношеніе между шестью отрѣзками доказано было Паппомъ; Стевартъ же употреблялъ соотношеніе между восемью отрѣзками; онъ доказалъ его во всей общности въ 59-мъ предложеніи первой книги.

Предшествующія предложенія 51—58 суть частные случаи, служившіе Стеварту для постепеннаго перехода къ общему предложенію. 60-е предложеніе, послѣднее въ первой книгѣ, есть также частный случай, когда двѣ стороны четыреугольника параллельны.

Предложенія 6—13 второй книги представляютъ другія свойства четыреугольника; въ изложеніе ихъ не входитъ инволюціонное соотношеніе, но они могутъ быть изъ него легко выведены. Всѣ эти предложенія относятся къ извѣстной теоремѣ, которая, по свидѣтельству Паппа, входила въ составъ поризмъ Евклида, именно: *Если три стороны перемѣннаго треугольника вращаются около трехъ неподвижныхъ полюсовъ, расположенныхъ на одной прямой, и двѣ вершины его движутся по двумъ даннымъ неподвижнымъ прямымъ, то третья вершина описываетъ прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ.* Стевартъ не излагаетъ этой теоремы въ общемъ видѣ, а доказываетъ только различные частные случаи ея. Кажется, онъ незамѣтилъ тѣсной связи этой теоремы съ общимъ инволюціоннымъ соотношеніемъ между отрѣзками, образуемыми на сѣкущей четырьмя сторонами и двумя діагоналями четыреугольника.

32. Предложенія о кругѣ можно разсматривать, какъ относящіяся къ образованію этой кривой посредствомъ пере-

сѣченія прямыхъ, вращающихся около двухъ неподвижныхъ полюсовъ, причемъ эти прямыя образуютъ на трансверсали отрѣзки, удовлетворяющіе нѣкоторымъ соотношеніямъ.

Мы распредѣлили эти предложенія на три группы.

Въ первой—два полюса расположены на окружности, трансверсаль же имѣетъ положеніе произвольное.

Во второй—полюсы помѣщены произвольно, причемъ одинъ изъ нихъ можетъ находиться и на окружности; трансверсаль же параллельна прямой, соединяющей полюсы.

Наконецъ въ третьей группѣ полюсы опять расположены произвольно, но трансверсаль перпендикулярна или наклонна къ прямой, соединяющей полюсы.

Во всѣхъ предложеніяхъ первой группы говорится объ отрѣзкахъ, образуемыхъ на хордѣ круга четырьмя сторонами вписаннаго четыреугольника.

Можно подумать, что здѣсь рѣчь идетъ о теоремѣ Дезарга, но это не такъ: Стевартъ выражаетъ соотношеніе между отрѣзками не однимъ уравненіемъ, какъ Дезаргъ, а двумя уравненіями, въ которыхъ входитъ одна точка и два вспомогательные отрѣзка.

Исключеніе этихъ отрѣзковъ, которое не было сдѣлано Стевартомъ, привело бы его къ соотношенію между одними только отрѣзками, образуемыми на хордѣ круга четырьмя сторонами четыреугольника; но это соотношеніе представляется не въ обыкновенной формѣ инволюціи шести точекъ, и въ видѣ трехчленнаго уравненія; поэтому мы должны думать, что Стевартъ не зналъ теоремы Дезарга, или по крайней мѣрѣ не пользовался ею въ своемъ сочиненіи.

Теорема, полученная этимъ геометромъ, доказана въ общемъ видѣ въ предложеніяхъ 46, 47 и 48 второй книги. Предложенія 41—45 суть частные случаи, служащіе для перехода къ общему предложенію.

Предложенія 29 — 38 относятся къ свойствамъ четыреугольника вписаннаго въ кругъ; при изложеніи ихъ Стевартъ

употребляетъ только одно уравненіе, въ которомъ мы узнаемъ частные случаи теоремы Дезарга.

Два предложенія 39-е и 40-е заключаютъ въ себѣ слѣдующее замѣчательное свойство вписаннаго въ кругъ четыреугольника: *квадратъ прямой, соединяющей точки встрѣчи противоположныхъ сторонъ, равенъ суммѣ квадратовъ касательныхъ, проведенныхъ изъ этихъ точекъ къ окружности.*

Предложеніе это, подобно предыдущимъ, легко выводится изъ теоремы Дезарга.

33. Почти вся вторая книга посвящена предложеніямъ объ отрѣзкахъ, образуемыхъ на трансверсали двумя подвижными прямыми, вращающимися около двухъ неподвижныхъ полюсовъ, пе лежащихъ на окружности.

Въ предложеніяхъ 14—21 и 44—52 трансверсаль параллельна прямой, соединяющей полюсы. Предложенія 23, 25 и 26 первой книги относятся сюда же.

Легко замѣтить, что во всѣхъ этихъ предложеніяхъ соотношенія между отрѣзками выражаются уравненіями второй степени.

Вотъ *a priori* причина этого обстоятельства и въ то же время средство придти прямо къ теоремамъ Стеварта и возстановить ихъ въ случаѣ утраты.

Когда точка пересѣченія двухъ вращающихся прямыхъ описываетъ вообще коническое сѣченіе, то отрѣзки, образуемые на неподвижной трансверсали, параллельной съ прямой, соединяющей полюсы, удовлетворяютъ соотношенію второй степени; обратно, когда отрѣзки имѣютъ между собою соотношеніе второй степени, — точка встрѣчи вращающихся прямыхъ всегда описываетъ коническое сѣченіе (какъ мы докажемъ это въ приложеніяхъ нашего принципа *гомографіи).* И такъ, вопервыхъ, если кривая есть кругъ, то отрѣзки должны удовлетворять соотношенію второй степени. Вовторыхъ, если дадимъ себѣ два полюса, положеніе трансверсали и желаемую форму соотношенія второй степени между отрѣзками, то получимъ два условныя уравненія для

выраженія требованія, чтобы коническое сѣченіе, описываемое точкою пересѣченія вращающихся прямыхъ, обращалось въ кругъ. Изъ этихъ уравненій можемъ опредѣлить величины двухъ изъ множества неопредѣленныхъ количествъ, именно: каэффиціентовъ соотношенія, положеній двухъ полюсовъ и трансверсали и положенія двухъ на ней точекъ, отъ которыхъ считаются отрѣзки.

Замѣчаніе это даетъ ключъ ко всѣмъ теоремамъ Стеварта. Оно прилагается также и къ другимъ подобнымъ же предложеніямъ этого геометра, помѣщеннымъ Симсономъ въ его *Трактатъ о поризмахъ.* Въ четвертомъ изъ пяти предложеній, данныхъ Ферматомъ подъ именемъ поризмъ, мы имѣемъ кажется первый образецъ этого рода предложеній о кругѣ.

34. Въ перечисленныхъ нами предложеніяхъ Стевартъ подражалъ Фермату; потомъ онъ обобщилъ его мысль, разсматривая отрѣзки на трансверсали, имѣющей какое угодно положеніе.

Такія свойства круга заключаются въ девятнадцати предложеніяхъ 22—40.

Здѣсь отрѣзки, образуемые вращающимися прямыми на трансверсали, не имѣютъ уже между собою постояннаго соотношенія второй степени и здѣсь уже не такъ легко, какъ въ предъидущемъ случаѣ, замѣтить общую форму различныхъ соотношеній, доказываемыхъ Стевартомъ. Не смотря на это, мы убѣдились, что эти соотношенія могутъ быть выведены изъ слѣдующаго общаго свойства коническихъ сѣченій.

Даны два неподвижные полюса и трансверсаль, встрѣчающая въ точкѣ E прямую, соединяющую полюсы; на трансверсали взята еще неподвижная точка O;

Если около полюсовъ будемъ вращать двѣ прямыя, пересѣкающія трансверсаль въ точкахъ a, a', такъ чтобы между величинами $\frac{Oa}{Ea}$ и $\frac{Oa'}{Ea'}$ сохранялось постоянное соотношеніе второй степени, то точка пересѣченія прямыхъ будетъ описывать коническое сѣченіе.

И обратно, если точка встрѣчи двухъ прямыхъ описываетъ коническое сѣченіе, то между $\frac{Oa}{Ea}$ и $\frac{Oa'}{Ea'}$, будетъ существовать соотношеніе второй степени.

Эта общая теорема можетъ вести ко множеству свойствъ круга, такъ какъ всегда будемъ имѣть два условія, выражающія, что описываемое коническое сѣченіе есть кругъ. Помощію этихъ условій опредѣлятся или два коэффиціента въ соотношеніи, или положеніе какихъ-нибудь двухъ составныхъ частей фигуры.

35. Кажется, что никто впослѣдствіи не продолжалъ изслѣдованій Стеварта о подобныхъ свойствахъ круга.

Теперь пренебрегаютъ такого рода геометрическими изысканіями, разсчитывая въ случаѣ нужды обратиться къ помощи анализа. Но понятно, что эти изысканія считались бы полезными и необходимыми, если бы имѣлось въ виду продолжать геометрическіе труды древнихъ и геометровъ предшествующаго столѣтія. Мнѣ кажется, что именно эта мысль руководила изслѣдованіями Карно въ его *Géometrie de position* и *Théorie des transversales.* По своему философскому плану сочиненія эти, подобно сочиненіямъ Симсона и Стеварта, сближаются, по моему мнѣнію, съ *данными* и съ *поризмами* Евклида. Это истинныя *дополненія* къ геометріи, считавшіяся у древнихъ необходимыми какъ для теоретическихъ, такъ и для практическихъ приложеній геометріи.

36. Предложенный нами разборъ сочиненій Стеварта показываетъ, что въ нихъ заключалось много предложеній, доказанныхъ въ отдѣльности, но представляющихъ частные случаи одни другихъ. Таковъ обыкновенный и неизбѣжный путь геометра, переходящаго отъ предложенія простѣйшаго къ болѣе общему, потомъ къ еще болѣе обширному и т. д.; при этомъ выводъ сколько-нибудь общаго предложенія требуетъ предварительнаго доказательства многихъ частныхъ случаевъ. Теперь мы можемъ доказать сразу и прямымъ путемъ самыя общія изъ этихъ предложеній и затѣмъ, раз-

сматривая ихъ во всей общности, примѣнить къ нимъ тѣ же изысканія, которыя дѣлались прежде надъ ихъ простѣйшими случаями. Такая простота, до крайности облегчающая изученіе, несомнѣнно свидѣтельствуетъ объ успѣхахъ геометріи въ послѣднее время; и та же простота проникла бы и во всѣ приложенія геометріи къ великимъ вопросамъ, изслѣдованнымъ Гюйгенсомъ и Ньютономъ, еслибы исключительная наклонность къ анализу, который одинъ поддерживается въ учрежденіяхъ, назначенныхъ для развитія и распространенія наукъ, не отстранила изученія и употребленія другаго метода [41]).

Въ предисловіи къ *Propositiones Geometricae* Стевартъ заявилъ, что онъ издастъ еще другіе томы о тѣхъ же геометрическихъ предметахъ. Не знаю, были ли найдены въ его рукописяхъ изслѣдованія, долженствовавшія войти въ составъ этихъ томовъ.

37. **Ламбертъ** (1728—1777). Знаменитый Ламбертъ, второй Лейбницъ по объему и глубинѣ своихъ познаній,

---

[41]) Скажутъ безъ сомнѣнія, что въ математикѣ, какъ и во всякой другой отрасли наукъ, вкусы свободны и что ученые сами должны отвѣчать за пренебреженіе, въ которомъ они оставляютъ геометрію. Въ отвѣтъ на это скажемъ прежде всего, что мы согласны признать необходимость преимущественнаго и даже исключительнаго преподаванія анализа, по причинѣ его всеобъемлемости, но только въ такихъ учрежденіяхъ, гдѣ науки математическія изучаются сами для себя; въ виду же приложеній математики къ научнымъ вопросамъ и къ интересамъ общественной жизни, на публичныхъ курсахъ, назначающихся исключительно для изложенія новыхъ открытій и для знакомства съ разнообразными отдѣлами математики должна по нашему мнѣнію, найти себѣ мѣсто и геометрія съ прекрасными методами, которыя она доставила великимъ геометрамъ двухъ послѣднихъ столѣтій, и съ ея усовершенствованіями въ послѣднее время. Однако на этихъ курсахъ излагаются только статьи по анализу и только такія открытія, которыя можно изложить помощію анализа: можно ли же сказать, что вкусы свободны? Такое равнодушіе къ столь важной отрасли математическихъ знаній, или, лучше сказать, устраненіе ея, неразумно и очень много вредитъ успѣхамъ этихъ знаній: всѣ науки, такъ тѣсно связаны другъ съ другомъ, что отсталость одной останавливаетъ развитіе другихъ.

долженъ быть включенъ въ число геометровъ, которые въ то время, когда всѣ умы увлечены были богатствомъ анализа, сохранили знаніе геометріи и любовь къ этой наукѣ и воспользовались ею для самыхъ глубокихъ приложеній.

Въ его многочисленныхъ сочиненіяхъ часто встрѣчаются различные вопросы чистой геометріи. Мы должны особенно указать на его геометрическіе трактаты *о перспективѣ* и *о кометахъ*.

Сочиненіе Ламберта о перспективѣ появилось сначала въ 1759 году; потомъ оно издано было въ 1773 году съ прибавленіемъ второй части, въ которой Ламбертъ, пользуясь способомъ перспективы какъ геометрическимъ пріемомъ, доказалъ многія предложенія о начертательныхъ свойствахъ, входящихъ теперь въ теорію трансверсалей, и положилъ начало той части геометріи, которая теперь называется *геометріею линейки*.

Трактатъ о кометахъ, подъ заглавіемъ *Insigniores orbitae cometarum proprietates* (in-8°, Augsbourg, 1761), содержитъ чисто геометрическое изложеніе многочисленныхъ свойствъ коническихъ сѣченій, свойствъ или чисто начертательныхъ, или служащихъ къ измѣренію элементовъ коническихъ сѣченій; эти прекрасныя открытія приложены къ опредѣленію движенія кометъ.

Особенно замѣчательно слѣдующее свойство эллипса, которое получило важное значеніе въ теоріи кометъ.

Если въ двухъ эллипсахъ, построенныхъ на общей большой оси, возьмемъ двѣ дуги, стягиваемыя равными хордами, и притомъ такъ, чтобы суммы радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ фокусовъ къ двумъ соотвѣтствующимъ концамъ этихъ дугъ, были также равны между собою; то площади секторовъ, заключающихся въ каждомъ эллипсѣ между дугою и двумя радіусами векторами, будутъ относиться какъ квадратные корни изъ параметровъ. (Sect. 4, lem. 26.)

Разсматривая эллипсъ какъ планетную орбиту, и вставляя вмѣсто секторовъ времена прохожденія соотвѣтствующихъ имъ дугъ, на основаніи Ньютонова принципа пропорціональности временъ съ площадями секторовъ, раздѣленныя на квадратный корень изъ параметра [42]), мы отсюда заключаемъ, что въ двухъ вышеупомянутыхъ эллипсахъ времена употребляемыя на прохожденіе двухъ секторовъ одинаковы.

Теорема эта даеть средство приводить вычисленіе времени, употребляемаго на прохожденіе дуги даннаго эллипса, ко времени прохожденія дуги какого угодно другаго эллипса, имѣющаго ту же большую ось, и даже—ко времени прохожденія части большой оси, такъ какъ эллипсъ обращается въ свою большую ось, когда другая ось исчезаетъ, и тогда большая ось дѣлается орбитою движущейся точки.

Геометрическія соображенія Ламберта очень просты, но тѣмъ не менѣе они привели его къ самой важной теоремѣ теоріи кометъ и позднѣйшія аналитическія доказательства этой теоремы потребовали всѣхъ усилій анализа.

Свойство эллипса, лежащее въ основаніи этой теоремы, принадлежитъ также и гиперболическимъ секторамъ; это доказано было геометрически знаменитымъ Лекселемъ, въ мемуарѣ котораго [43]) находится много другихъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Ламбертъ часто возвращался къ теоріи движенія планетъ и къ вычисленію орбитъ; онъ нашелъ возможнымъ еще извлечь много пользы изъ геометріи при замѣнѣ анализа графическими построеніями въ вопросѣ объ опредѣленіи кометныхъ орбитъ по тремъ наблюденіямъ [44]).

Мы не можемъ указать въ многочисленныхъ трудахъ Ламберта другихъ изслѣдованій, заслуживающихъ признательно-

---

[42]) *Principia*, lib. I, sect. 3, prop. XIV.

[43]) Петербургскіе *Nova Acta* t. I, 1783.

[44]) Этотъ способъ развитъ подробно и приложенъ ко многимъ примѣрамъ въ третьей части собранія мемуаровъ Ламберта: *Beiträge zur Mathematick*, etc. Berlin, 1765—1772, 4 vol. in—8°.

сти со стороны любителей чистой геометріи, такъ какъ большая часть его сочиненій написана по нѣмецки.

38. Этимъ мы оканчиваемъ обзоръ развитія и значенія геометріи втеченіе XVIII вѣка, составляющаго нашу четвертую эпоху. Любовь и навыкъ къ геометрическимъ изысканіямъ угасли и мы затѣмъ можемъ встрѣтить только отдѣльныя изслѣдованія, разсѣянныя въ академическихъ изданіяхъ. Нѣкоторыя изъ такихъ изслѣдованій дали бы намъ поводъ упомянуть знаменитыя имена Эйлера, Лагранжа, Фусса, Лекселя и др.; обобщая посредствомъ новѣйшихъ способовъ первые результаты этихъ знаменитыхъ геометровъ, мы могли бы показать, что геометрія сдѣлала въ послѣднее время несомнѣнные успѣхи и что она способна къ рѣшительному усовершенствованію, которое со временемъ должно уменьшить разстояніе, отдѣляющее теперь эту науку отъ математическаго анализа.

Но мы спѣшимъ къ концу, новыя же подробности отдалили бы насъ отъ него.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ПЯТАЯ ЭПОХА.

1. **Начертательная геометрія.** Въ послѣднее время, послѣ почти вѣковой остановки, чистая геометрія обогатилась новымъ ученіемъ — *начертательной геометріей*, которая представляетъ необходимое дополненіе аналитической геометріи Декарта и которая, подобно ей, должна была принести неисчислимые результаты и отмѣтить новую эпоху въ исторіи геометріи.

Этою наукой мы обязаны творческому генію Монжа.

Она обнимаетъ собою двѣ задачи.

Вопервыхъ, задачу—представить на плоскости всякое тѣло опредѣленной формы и такимъ образомъ привести къ построеніямъ на плоскости такія графическія операціи, которыя были бы невыполнимы въ пространствѣ.

Вовторыхъ задачу—вывести изъ этого представленія тѣлъ математическія соотношенія между ихъ формами и взаимными положеніями.

Это прекрасное изобрѣтеніе назначалось первоначально для практической геометріи и для зависящихъ отъ нея искусствъ; дѣйствительно, начертательная геометрія представляетъ *общую теорію* ихъ и приводитъ къ небольшому числу отвлеченныхъ и неизмѣнныхъ принциповъ и къ удобнымъ и всегда вѣрнымъ построеніямъ—всѣ геометрическія дѣйствія, представляющіяся при обдѣлкѣ камней и дерева, въ перспективѣ, фортификаціи, гномоникѣ и т. д.; — дѣйствія

которыя, до тѣхъ поръ выполнялись помощію способовъ безсвязныхъ, ненадежныхъ и часто недостаточно строгихъ. (См. Примѣчаніе XXIII).

2. Но кромѣ важности этого перваго назначенія, благодаря которому раціональность и точность внесены въ искусства, начертательная геометрія имѣетъ другое важное значеніе, именно для чистой геометріи, и вообще для наукъ математическихъ, которымъ она оказала существенныя услуги во многихъ отношеніяхъ.

Начертательная геометрія, будучи графическимъ переводомъ общей раціональной геометріи, послужила свѣточемъ при изысканіи и истолкованіи результатовъ геометріи аналитической; по характеру своихъ пріемовъ, имѣющихъ цѣлію установить строгое и полное соотношеніе между фигурами, дѣйствительно начерченными на плоскости, и тѣлами воображаемыми въ пространствѣ, она ближе ознакомила съ геометрическими формами; она дала возможность представлять ихъ скоро и точно и тѣмъ удвоила наши средства изслѣдованія въ наукѣ о пространствѣ.

Благодаря этому, геометрія получила возможность еще легче вносить свойственную ей общность и очевидность также и въ механику и въ другія физико-математическія науки.

Полезное вліяніе начертательной геометріи распространилось естественнымъ образомъ и на нашъ математическій языкъ: онъ сдѣлался удобнѣе и яснѣе, освободившись отъ осложненныхъ фигуръ, отвлекавшихъ вниманіе отъ сущности дѣла и отягощавшихъ воображеніе и изложеніе.

Однимъ словомъ, начертательная геометрія подкрѣпила и развила нашу способность къ представленію; сообщила болѣе вѣрности и ясности нашимъ сужденіямъ, болѣе точности и чистоты нашему языку; въ первомъ отношеніи она была неизмѣримо полезна для наукъ математическихъ вообще.

3. Разсматривая въ частности начертательную геометрію только какъ геометрическій способъ, мы опять находимъ, что она принесла чрезвычайную пользу наукѣ о пространствѣ.

По своимъ основнымъ положеніямъ и по тѣмъ постояннымъ соотношеніямъ, которыя она устанавливаетъ между плоскими фигурами и фигурами трехъ измѣреній, она является способомъ изысканія и доказательства для раціональной геометріи; по своимъ пріемамъ, представляющимъ для практической геометріи тоже, что ариѳметика для вычисленій, она даетъ средства къ рѣшенію *a priori* такихъ вопросовъ, въ которыхъ геометрія Декарта, столь могущественная при другихъ обстоятельствахъ, останавливается передъ преградами встрѣчаемыми алгеброй.

4. Въ *Traité de Géometrie descriptive* Монжъ далъ первые примѣры той пользы, которую можно извлечь изъ тѣснаго и систематическаго сближенія между фигурами двухъ и трехъ измѣреній. Подобными соображеніями онъ съ рѣдкимъ изяществомъ и совершенною очевидностію доказалъ прекрасныя теоремы, составляющія теорію полюсовъ кривыхъ линій второго порядка, свойство центровъ подобія трехъ круговъ лежать по три на прямыхъ линіяхъ и различныя другія предложенія геометріи на плоскости.

Послѣ того ученики Монжа съ успѣхомъ развивали эту совершенно новаго рода геометрію, которую часто и по справедливости называютъ именемъ школы Монжа и которая, какъ мы сказали, состоитъ въ примѣненіи плоской геометріи къ изслѣдованіямъ въ геометріи трехъ измѣреній.

Открытія, сдѣланныя этимъ путемъ, весьма многочисленны; изложеніе ихъ представило бы безъ сомнѣнія весьма интересную страницу въ исторіи геометріи; мы не можемъ сдѣлать здѣсь этого, не можемъ войти во многія подробности, которыя черезъ мѣру увеличили бы это сочиненіе [1]).

---

[1]) Геометръ Бріаншонъ одинъ изъ первыхъ замѣтилъ всю важность новаго способа и въ мемуарѣ, напечатанномъ въ 13-й тетради *Journal de l' école polytechnique*, 1810, представилъ объ этомъ предметѣ новыя и обширныя соображенія, которымъ Понселе, какъ самъ онъ говоритъ, обязанъ первою мыслію тѣхъ прекрасныхъ и многочисленныхъ геометрическихъ изысканій, которыя заключаются въ его *Traité des propriétés projectives*. Школа Монжа много обязана также Жергонну, который

5. Пріемъ, помощію котораго Монжъ преобразовывалъ фигуры трехъ измѣреній въ фигуры на плоскости, т. е. прямоугольное проложеніе на двѣ перпендикулярныя плоскости, которыя потомъ совмѣщаются,—даетъ способъ открывать множество предложеній плоской геометріи о фигурахъ происходящихъ отъ совокупности обѣихъ проэкцій. Нѣтъ чертежа (эпюра, *épure*) въ начертательной геометріи, который не выражалъ бы какой-нибудь теоремы геометріи на плоскости. Въ большую часть такихъ теоремъ входятъ параллельныя между собою линіи, перпендикулярныя къ прямой, означающей пересѣченіе двухъ плоскостей; но посредствомъ перспективнаго проложенія фигуры на другую плоскость можно сдѣлать эти линіи сходящимися въ одной точкѣ и сообщить теоремѣ полную общность.

Это, какъ мы уже сказали, есть весьма богатое средство доказывать множество предложеній плоской геометріи совершенно новымъ и особымъ путемъ. Напримѣръ этимъ способомъ можно доказать, если не всѣ, то большую часть теоремъ теоріи трансверсалей и большую часть неисчислимыхъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Возьмемъ для примѣра чертежъ, съ помощію котораго опредѣляется точка пересѣченія трехъ плоскостей; эта точка находится въ пересѣченіи трехъ прямыхъ, по которымъ плоскости пересѣкаются между собою попарно; *поэтому проэкціи этихъ трехъ прямыхъ на двѣ плоскости проэкцій проходятъ черезъ одну точку;* отсюда получается очевидно слѣдующая теорема.

Представимъ себѣ на плоскости два треугольника, которыхъ стороны встрѣчаются попарно въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой L; черезъ произвольную точку проведемъ три прямыя къ вершинамъ перваго треугольника

служилъ ей какъ своими собственными трудами, всегда проникнутыми глубокимъ философскимъ взглядомъ, такъ и въ качествѣ издателя *Annales de Mathématiques*, гдѣ онъ помѣщалъ сочиненія бывшихъ воспитанниковъ политехнической школы.

и продолжимъ ихъ до пересѣченія въ трехъ точкахъ съ прямою L; потомъ три послѣднія точки соединимъ соотвѣтственно съ вершинами втораго треугольника: три такія прямыя пройдутъ черезъ одну точку.

Эта теорема даетъ множество слѣдствій; мы ограничимся замѣчаніемъ, что изъ нея, какъ слѣдствіе, получается теорема Дезарга, о которой мы уже говорили (вторая эпоха, n° 28); для этого достаточно взять произвольную точку въ пересѣченіи двухъ прямыхъ, соединяющихъ вершины перваго треугольника съ соотвѣтственными вершинами втораго.

Чертежъ, помощію котораго строятся слѣды плоскости, проходящей черезъ три данныя точки, ведетъ къ другой подобной же теоремѣ и изъ нея, какъ слѣдствіе, проистекаетъ теорема взаимная Дезарговой.

6. Этотъ способъ съ такою же простотою ведетъ къ свойствамъ коническихъ сѣченій и даже кривыхъ какой угодно степени.

Такъ напримѣръ, представимъ себѣ коническое сѣченіе на горизонтальной плоскости, какъ основаніе цилиндра съ извѣстнымъ направленіемъ образующихъ; построимъ слѣдъ этого цилиндра на вертикальной плоскости и потомъ сдѣлаемъ перспективу всего чертежа на какую нибудь плоскость; мы получимъ фигуру, которая представляетъ черченіе по одному произвольному коническому сѣченію другаго коническаго сѣченія при помощи пересѣченій прямыхъ, исходящихъ изъ двухъ неподвижныхъ точекъ.

Если вмѣсто перваго коническаго сѣченія возьмемъ кривую какой угодно степени, то получимъ другую кривую той же степени.

Итакъ, здѣсь мы имѣемъ способъ для преобразованія на плоскости какой угодно кривой въ другую кривую того же порядка.

Ясно, что касательныя ко второй кривой опредѣляются при помощи касательныхъ къ первой; касательныя эти пересѣкаются попарно въ точкахъ одной прямой, именно прямой

пересѣченія двухъ плоскостей проэкцій. Такимъ образомъ получается теорема, относящаяся къ кривымъ какого угодно класса.

Для втораго примѣра возьмемъ вертикальный цилиндръ, имѣющій основаніемъ коническое сѣченіе въ горизонтальной плоскости, пересѣчемъ его произвольною плоскостью и построимъ вертикальную проэкцію кривой сѣченія: это будетъ новое коническое сѣченіе. Касательныя къ этимъ двумъ кривымъ, будучи проэкціями касательныхъ къ кривой пересѣченія цилиндра съ плоскостію, соотвѣтствуютъ другъ другу попарно; если съ помощію этихъ проэкцій будемъ отыскивать точки встрѣчи касательныхъ въ пространствѣ съ одною изъ плоскостей проэкцій, то найдемъ, что точки эти лежатъ на прямой, именно на слѣдѣ сѣкущей плоскости на плокости проэкцій. Это обстоятельство ведетъ къ общему свойству двухъ коническихъ сѣченій, представляющихъ проэкціи коническаго сѣченія въ пространствѣ. Сдѣлавъ перспективу чертежа на какую-нибудь плоскость, получимъ слѣдующее общее свойство двухъ какихъ угодно коническихъ сѣченій.

Если черезъ точку встрѣчи двухъ общихъ касательныхъ къ двумъ какимъ угодно коническимъ сѣченіямъ на плоскости проведемъ произвольно сѣкущую, которая встрѣтитъ каждую изъ кривыхъ въ двухъ точкахъ, и если въ этихъ точкахъ проведемъ къ кривымъ касательныя, то касательныя къ первой кривой будутъ встрѣчаться съ касательными ко второй въ четырехъ точкахъ, расположенныхъ попарно на двухъ постоянныхъ прямыхъ, положеніе которыхъ не зависитъ отъ положенія сѣкущей, проводимой черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ къ двумъ коническимъ сѣченіямъ.

Эта важная въ теоріи коническихъ сѣченій теорема можетъ быть доказана также и другими различными соображеніями, почерпнутыми изъ геометріи трехъ измѣреній; такъ напримѣръ, если черезъ коническое сѣченіе проведемъ два конуса, имѣющіе вершины въ двухъ какихъ-нибудь точкахъ про-

странства, то вторая кривая пересѣченія этихъ конусовъ, будетъ другое коническое сѣченіе. Не трудно усмотрѣть соотношеніе между такими двумя кривыми, размѣщенными въ пространствѣ на двухъ конусахъ. Если послѣ этого составимъ чертежъ, представляющій проложеніе втораго коническаго сѣченія на плоскость перваго, то получимъ систему двухъ коническихъ сѣченій на плоскости и всѣ соотношенія между кривыми въ пространствѣ приведутъ къ любопытнымъ свойствамъ этого чертежа; въ числѣ ихъ находится и изложенная выше теорема.

7. Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы видѣть, какъ каждый чертежъ начертательной геометріи можетъ выражать собою теорему геометріи на плоскости, и можно кажется сказать, что этотъ путь открываетъ богатый запасъ геометрическихъ истинъ. Съ такой точки зрѣнія начертательная геометрія Монжа является методомъ раціональной геометріи. Мы назовемъ его Méthode de *Transmutation des figures*.

Кромѣ этого превращенія свойствъ фигуръ трехъ измѣреній въ свойства плоскихъ фигуръ мы должны еще указать на другое особое примѣненіе начертательной геометріи, именно на то, что она ведетъ къ безконечному множеству способовъ преобразовывать плоскія фигуры однѣ въ другія, подобно тому, какъ это дѣлали Де-Лагиръ и Ньютонъ. Отсюда между прочимъ проистекаетъ возможность безконечно разнообразно достигать цѣли, которую имѣлъ съ виду Де-Лагиръ, именно—чертить помощію циркуля различныя коническія сѣченія и такимъ образомъ приводить къ плоскости перспективныя построенія. Въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно вообразить себѣ конусъ съ круговымъ основаніемъ и съ вершиною въ какой нибудь точкѣ пространства; затѣмъ пересѣчь этотъ конусъ произвольною плоскостью: въ пересѣченіи получимъ коническое сѣченіе, каждая проэкція котораго можетъ быть разсматриваема, какъ *преобразованіе* проэкціи основанія конуса; такъ какъ эта преобразованная кривая можетъ быть получена посредствомъ построеній на плоскости, то цѣль Де-Лагира такимъ образомъ достигнута.

Принимая въ соображеніе неопредѣленность различныхъ *данныхъ* въ этой задачѣ, мы найдемъ, что общее рѣшеніе ея ведетъ ко множеству разнообразныхъ способовъ и пріемовъ для рѣшенія задачи Де-Лагира.

8. Наукою уже признана за Монжемъ та заслуга, что онъ ознакомилъ насъ ближе съ геометріей трехъ измѣреній и научилъ переходить отъ нея къ плоской геометріи и наоборотъ; но невполнѣ еще признана важность, заключающаяся въ томъ особомъ способѣ доказательствъ, примѣры котораго мы привели выше; это частію зависитъ отъ того, что получаемыя такимъ путемъ геометрическія истины были въ свое время совершенно новы, частію же отъ того, что это были только первые примѣры особаго превращенія (*transmutation*) фигуръ трехъ измѣреній въ плоскія и наоборотъ. Успѣхи единственнаго употреблявшагося до тѣхъ поръ способа преобразованія фигуръ, именно перспективы,—способа, которымъ такъ удачно пользовался Паскаль и помощію котораго Де-Лагиръ привелъ всѣ геометрическія операціи къ построеніямъ на плоскости,—были такого рода, что ими объясняется предпочтеніе предъ всякими другими преобразованіями, какъ въ пространствѣ, такъ и на плоскости.

Но, если мы обратимся къ алгебрѣ и будемъ искать причины ея необыкновенной пользы для геометріи, то развѣ мы не увидимъ, что алгебра обязана значительною долею этой пользы именно удобству тѣхъ преобразованій, которымъ подвергаются въ ней введенныя первоначально выраженія? Тайна и механизмъ этихъ преобразованій и составляютъ сущность этой науки и постоянный предметъ изысканій для математиковъ. Весьма естественно стараться ввести и въ чистую геометрію подобныя же преобразованія, основывающіяся непосредственно на свойствахъ и соотношеніяхъ данныхъ фигуръ.

Яснымъ доказательствомъ пользы геометрическихъ преобразованій служитъ теорія стереографической проэкціи, благодаря которой самыя простыя и очевидныя свойства системы плоскихъ кривыхъ, начерченныхъ на поверхности

втораго порядка, прилагаются къ системѣ подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій (включая сюда прямую линію и точку). Къ такимъ же преобразованіямъ относятся различные способы, основывающіеся, какъ мы покажемъ, на двухъ общихъ геометрическихъ началахъ, именно на началахъ *двойственности* и *гомографіи* фигуръ.

Подобнаго рода способы, полезность которыхъ, намъ кажется, достаточно доказана, заслуживаютъ изученія и геометры, которые занялись бы этимъ предметомъ, оцѣнили бы, если мы не ошибаемся, философскую важность преобразованія лучше, чѣмъ мы въ настоящей попыткѣ уяснить ее, основываясь на способахъ Начертательной Геометріи Монжа.

9. **Перспективная Геометрія Кузинери.** Ученія Монжа уже вызвали одинъ трудъ подобнаго рода, о которомъ мы теперь имѣемъ случай сказать нѣсколько словъ, отступая отъ хронологическаго порядка. Это *Geometrie perspective* de Cousinery (in 4°, 1828), отличающаяся отъ пріемовъ Монжа тѣмъ, что авторъ употребляетъ только одну проэкцію, или перспективу, на плоскости.

Всякая плоскость, каково бы ни было ея положеніе въ пространствѣ, опредѣляется на чертежѣ (épure) двумя параллельными прямыми, изъ которыхъ одна есть пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью чертежа, а вторая есть пересѣченіе плоскости чертежа съ плоскостію параллельною, первой и проведенною черезъ глазъ, т.-е. черезъ центръ, изъ котораго проводятся проэктирующія линіи. Подобнымъ же образомъ прямая линія обозначается двумя точками, одна изъ которыхъ есть пересѣченіе прямой съ плоскостью проэкціи, а другая пересѣченіе съ тою же плоскостью прямой, проходящей черезъ глазъ параллельно первой прямой. Чтобы опредѣлить точку, нужно знать двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся въ этой точкѣ; одна изъ этихъ прямыхъ можетъ быть проведена черезъ глазъ и, слѣдовательно, изображаться въ перспективѣ одною точкой. Пріемъ этотъ очень простъ и остроуменъ; чертежи, къ которымъ онъ ведетъ, не особен-

но сложны и подобно чертежамъ начертательной геометріи Монжа, способны выражать собою различныя теоремы, какъ это и доказалъ Кузинери.

Не останавливаясь на практической пользѣ, которую можетъ принести этотъ способъ въ качествѣ вспомогательнаго средства въ строительномъ искусствѣ, подобно начертательной геометріи Монжа, мы смотримъ на него, какъ на способъ изысканія и доказательства множества геометрическихъ истинъ, и въ этомъ отношеніи онъ, по нашему мнѣнію, заслуживаетъ вниманія любителей геометріи. Кузинери ограничился немногими примѣрами, имѣя только въ виду достаточно уяснить пользу своего пріема; такимъ образомъ онъ открылъ новое поле для геометрическихъ изысканій, на которомъ послѣ него можно еще навѣрное собрать богатую жатву.

10. **Новый способъ доказательства.** По поводу начертательной геометріи Монжа намъ остается еще сказать о вліяніи, которое она имѣла на геометрію, введя новый способъ для доказательствъ—способъ, который былъ отвергнутъ древними, какъ несогласный съ ихъ строгими началами, но который въ рукахъ Монжа и геометровъ его школы привелъ къ самымъ счастливымъ результатамъ.

Сущность этого способа можно выразить слѣдующими словами: „Для облегченія доказательства, фигура, на которой изслѣдуется какое-нибудь общее свойство, разсматривается при такомъ состояніи ея общаго построенія, при которомъ существуютъ извѣстныя точки, плоскости, или линіи, которыя при другихъ состояніяхъ дѣлаются мнимыми. Доказанная такимъ образомъ теорема распространяется потомъ и на тѣ случаи, когда сказанныя точки, плоскости и линіи становятся мнимыми, т.-е. теорема признается справедливою при всѣхъ обстоятельствахъ построенія, какія только можетъ представлять разсматриваемая фигура.» Геометрія Монжа даетъ много прекрасныхъ примѣровъ такого пріема.

Такъ напримѣръ, при доказательствѣ, что для конусовъ, описанныхъ около поверхности втораго порядка и имѣющихъ

вершины на одной прямой, плоскости кривыхъ прикосновенія проходятъ черезъ *одну* прямую линію, Монжъ предполагаетъ, что черезъ прямую, на которой расположены вершины конусовъ, могутъ быть проведены къ поверхности двѣ касательныя плоскости. Въ такомъ случаѣ всѣ кривыя прикосновенія пройдутъ черезъ точки касанія этихъ плоскостей и плоскости кривыхъ будутъ слѣдовательно проходить черезъ прямую соединяющую эти точки касанія. Теорема такимъ образомъ доказана при сказанномъ положеніи фигуры; Монжъ говоритъ, что предложеніе распространяется и на тотъ случай, когда черезъ прямую, представляющую геометрическое мѣсто вершинъ конусовъ, нельзя провести касательныхъ плоскостей по поверхности; другими словами—что теорема имѣетъ мѣсто при всякомъ положеніи этой прямой.

Основаніемъ этого пріема Монжа должно служить, какъ намъ кажется, замѣчаніе, что общее построеніе фигуры можетъ представлять два различные случая: въ первомъ дѣйствительно существуютъ и распознаются нѣкоторыя величины (точки, линіи, плоскости или поверхности), отъ которыхъ общее построеніе не находится въ необходимой зависимости, но которыя составляютъ только случайныя слѣдствія его *(consequences contingentes)*; во второмъ случаѣ этихъ величинъ болѣе нѣтъ, онѣ становятся мнимыми, но общія условія построенія остаются тѣ же самыя.

Если, напримѣръ, мы хотимъ представить себѣ поверхность втораго порядка и прямую линію, которыя находились бы въ самомъ общемъ положеніи одна относительно другой, то при этомъ возможны два случая: прямая или проникаетъ въ поверхность, или не пересѣкается съ нею. Оба случая представляютъ одинаковую общность, такъ какъ въ каждомъ изъ нихъ прямая проводится совершенно произвольно и независимо отъ даннаго положенія поверхности втораго порядка; случаи эти отличаются только тѣмъ, что двѣ точки пересѣченія прямой съ поверхностію въ первомъ случаѣ дѣйствительныя, а во второмъ—мнимыя. Мы говоримъ по-

этому, что точки пересѣченія представляютъ *случайныя* соотношенія *(relations contingentes)* между прямою и поверхностію.

Нѣтъ надобности подробно разъяснять, что здѣсь мы говоримъ совсѣмъ не о тѣхъ особенностяхъ въ построеніи фигуръ, которыя обозначаются названіемъ *частныхъ случаевъ (cas particuliers)* и которыя получаются, когда нѣкоторыя точки, линіи, или поверхности, совпадаютъ. Такъ, мы имѣли бы частный случай въ предыдущемъ примѣрѣ, еслибы взяли прямую, касающуюся поверхности втораго порядка; теоремы, доказанныя для такого случая, нельзя разсматривать, какъ необходимо распространяющіяся на всѣ случаи общаго построенія.

11. Пріемъ, о которомъ мы говоримъ, явился, кажется, въ первый разъ въ прекрасныхъ примѣрахъ, предложенныхъ Монжемъ въ его Начертательной Геометріи. Потомъ этому пріему слѣдовала большая часть учениковъ Монжа, но всегда, какъ и самъ Монжъ, молча, т.-е. не входя въ объясненія, подобныя тѣмъ, которыя мы изложили выше, и не пытаясь подтвердить этотъ смѣлый способъ разсужденія.

Начало непрерывности. Изысканіе такого рода, вполнѣ заслуживающее основательнаго обсужденія, предпринято было только въ послѣднее время Понселе въ связи съ другими важными вопросами раціональной геометріи. Этотъ ученый геометръ высказалъ свое *начало непрерывности* въ *Traité des propriétés projectives;* оно имъ развито и съ успѣхомъ употреблено въ приложеніяхъ; но, намъ кажется, другіе ученые должны считать это начало, за недостаткомъ строгаго доказательства, только сильнымъ наведеніемъ и превосходнымъ средствомъ для предугадыванія и открытія истинъ—средствомъ, которое однако не замѣняетъ собою непосредственно и во всѣхъ случаяхъ строгаго доказательства.

Нельзя не согласиться, что еслибы геометры, пользующіеся способомъ Монжа, или началомъ непрерывности, обязаны

были всякій разъ доказывать этотъ пріемъ чисто геометрическими соображеніями, основанными на признанныхъ уже и *a priori* доказанныхъ положеніяхъ, то всѣ извѣстныя до сихъ поръ средства могли бы оказаться недостаточными. Если путь, которому они слѣдуютъ за Монжемъ, всегда оказывался вѣрнымъ и не оставлялъ въ ихъ умѣ никакой неясности, то подобное довѣріе, по моему мнѣнію, основывается на сознаніи непогрѣшимости, которое въ нихъ вызвано алгебраическимъ анализомъ.

12. **Доказательство способа Монжа.** И дѣйствительно, мы думаемъ, что во всякомъ отдѣльномъ случаѣ пріемъ этотъ можетъ быть подтвержденъ разсужденіями, основанными на общихъ началахъ анализа.

Достаточно замѣтить, что различіе двухъ общихъ случаевъ построенія фигуры, о которыхъ мы говорили выше и которые для насъ важны, такъ какъ въ нихъ заключается по нашему мнѣнію сущность занимающаго насъ вопроса,—никогда не разсматривается при приложеніи конечнаго анализа къ геометріи. Получаемые результаты примѣняются во всей силѣ къ обоимъ общимъ случаямъ. Этими результатами выражается теорема, относящаяся къ *существеннымъ и постояннымъ* частямъ фигуры *(parties integrantes et permanentes)*, принадлежащимъ общему построенію и равно дѣйствительнымъ въ обоихъ случаяхъ: эта теорема совершенно независима отъ *второстепенныхъ* или *случайныхъ* частей фигуры *(parties secondaires, ou contingentes et accidentelles)*, которыя могутъ быть безразлично дѣйствительными, или мнимыми, не измѣняя этимъ общихъ условій построенія.

И потому, если такіе общіе результаты доказаны для однаго изъ двухъ общихъ состояній фигуры, то мы имѣемъ право заключить, что они имѣютъ мѣсто и для другаго состоянія.

Подобное подтвержденіе пріема Монжа, которое можно разсматривать, какъ доказательство *a posteriori* закона непрерывности, можетъ представлять въ геометріи такія же

исключенія, какія этотъ законъ представляетъ въ другихъ случаяхъ; эти исключенія будутъ совершенно тѣ же, какія встрѣчаются въ самомъ анализѣ. Слѣдуетъ, напримѣръ, быть весьма осторожнымъ, примѣняя этотъ законъ къ изысканіямъ, въ которыхъ при аналитическомъ выраженіи общихъ условій построенія оказывались бы перемѣнными какія-либо величины, кромѣ величинъ и знаковъ коэффиціентовъ при перемѣнныхъ величинахъ; напримѣръ, еслибы мѣнялись знаки показателей у перемѣнныхъ [2]). Нельзя также прилагать этотъ пріемъ къ вопросамъ, которые при аналитическомъ изслѣдованіи приводятъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, потому что тогда простая перемѣна знака, составляющая различіе между двумя общими состояніями фигуры, могла бы совершенно измѣнить результаты, данные анализомъ.

Но во всѣхъ геометрическихъ вопросахъ, требующихъ пособія только конечнаго анализа, приложеніе котораго указывается ученіемъ Декарта, мы можемъ имѣть полное довѣріе къ пріему Монжа. Если, напримѣръ, мы разсматриваемъ въ пространствѣ конусъ втораго порядка и сѣкущую плоскость, имѣющую относительно конуса какое угодно положеніе, то существуетъ два различныя положенія плоскости, удовлетворяющихъ въ одинаковой степени условію совершенной общности. Въ одномъ положеніи плоскость пересѣкаетъ конусъ по гиперболѣ, къ которой мы можемъ провести двѣ асимптоты; во второмъ положеніи пересѣченіе происходитъ по эллипсу; и двѣ прямыя, которыя въ первомъ случаѣ были асимптотами гиперболы, становятся во второмъ случаѣ мнимыми. Но тѣмъ не менѣе всякое общее свойство первой фигуры, если оно даже выведено при помощи асимптотъ, будетъ принадлежать и второй фигурѣ; предполагая при этомъ конечно, что выведенное свойство не относится прямо

---

[1]) Подобныя изысканія не могутъ, кажется, встрѣчаться въ геометріи. Два общія состоянія фигуры, служащія основаніемъ пріема Монжа, всегда должны различаться, по нашему мнѣнію, при алгебраическомъ выраженіи только различіемъ знаковъ при независимыхъ коэффиціентахъ.

или скрытымъ образомъ (*implicite*) къ асимптотамъ, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ свойстзо это не было бы общимъ, независимымъ отъ тѣхъ обстоятельствъ построенія, вслѣдствіе которыхъ асимптомы становятся дѣйствительными или мнимыми.

Сказанное о эллипсѣ и гиперболѣ не можетъ быть примѣняемо къ параболѣ, такъ какъ положеніе сѣкущей плоскости, при которомъ на конусѣ получается эта кривая, есть особое а не совершенно общее. Поэтому свойство параболы, доказанное на такой фигурѣ, не можетъ распространяться на основаніи одного только принципа Монжа на эллипсъ или гиперболу, такъ какъ оно основывается на частномъ положеніи плоскости относительно конуса.

13. Подобныя же разсужденія примѣняются къ поверхностямъ втораго порядка. Поверхности эти съ извѣстной точки зрѣнія можно раздѣлить на два класса: одна изъ нихъ (гиперболоидъ съ одною полостью) прикасается къ касательной плоскости по двумъ прямымъ, которыя всѣми точками лежатъ на поверхности; въ двухъ другихъ поверхностяхъ (въ эллипсоидѣ и въ гиперполоидѣ съ двумя полостями) эти прямыя— мнимыя. Всякое общее свойство гиперболоида съ одною полостью, доказанное при помощи этихъ прямыхъ, но въ выраженіи котораго онѣ не входятъ явнымъ, или скрытымъ образомъ, будетъ принадлежать также и двумъ другимъ поверхностямъ.

Если напримѣръ мы хотимъ доказать двѣ теоремы, служащія основаніемъ теоріи стереографической проэкціи, то начинаемъ съ гиперболоида съ одною полостью, для котораго эти теоремы очевидны, благодаря помощи двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ всякую точку по его поверхности; отсюда мы заключаемъ прямо и съ совершенною увѣренностію, что тѣ же теоремы имѣютъ мѣсто для всѣхъ поверхностей втораго порядка.

Но, если бы мы вмѣсто гиперболоида съ одною полостью, представляющаго поверхность столь же общаго построенія,

какъ эллипсоидъ и гиперболоидъ съ двумя полостями, доказали эти теоремы для шара, то мы не могли бы распространить ихъ на всѣ поверхности втораго порядка помощію одного только способа Монжа, потому что шаръ есть частный, а не общій, видъ такихъ поверхностей.

14. **Способъ обобщенія.** Но мы должны прибавить, что посредствомъ другаго способа можно распространять на эллипсоидъ общія свойства шара; эти свойства, при помощи пріема Монжа, дѣлаются затѣмъ общими свойствами всѣхъ поверхностей втораго порядка. Этотъ аналитическій способъ преобразованія изложенъ нами въ *Correspondance polytechnique* (t. III, p. 326); онъ состоитъ въ пропорціональномъ измѣненіи координатъ точекъ сферической поверхности. Этотъ же способъ мы употребляли для преобразованія свойствъ, относящихся къ проэкціямъ и къ объемамъ тѣлъ; его же потомъ прилагали мы къ изысканіямъ о длинѣ кривыхъ линій, и о площадяхъ кривыхъ поверхностей. Наконецъ мы обобщили этотъ способъ, приспособивъ его къ распространенію свойствъ параболоида на гиперболодъ, также какъ свойства шара распространяются на эллипсоидъ Но такъ какъ способъ этотъ заключается какъ частный случай въ нашемъ общемъ началѣ *гомографическаго преобразованія*, то мы и не будемъ болѣе останавливаться на его приложеніяхъ и на доказательствахъ его пользы.

Укажемъ только на существенное различіе, которое существуетъ между этимъ способомъ и пріемомъ изложеннымъ выше, хотя оба эти способа ведутъ къ обобщенію первоначальнаго результата.

Второй изъ изложенныхъ способовъ преобразованія есть дѣйствительно *способъ обобщенія*, въ которомъ свойства частной фигуры распространяются на фигуры совершенно общаго построенія. Въ первомъ же способѣ, основывающемся на началѣ случайныхъ соотношеній, мы имѣемъ дѣло съ свойствами совершенно общей фигуры и переносимъ ихъ на фигуру столь же общую, отличающуюся отъ прежней

только второстепенными и случайными обстоятельствами, которыя хотя и служили для доказательства, но въ результатѣ исчезаютъ и не имѣютъ ни явно, ни скрытнымъ образомъ, никакого значенія въ выраженіи того предложенія, для доказательства котораго употреблялись.

15. Способъ Монжа заслуживаетъ по нашему мнѣнію, болѣе чѣмъ всякій другой, названія *нагляднаго* способа, такъ какъ онъ дѣйствительно основывается на ясномъ, наглядномъ, разсмотрѣніи предмета. Но этотъ характеръ наглядности свойственъ вообще всѣмъ способамъ, основывающимся на непосредственномъ размотрѣніи пространственныхъ формъ, въ особенности тѣмъ изъ нихъ, въ которыхъ разсматриваются фигуры трехъ измѣреній для вывода свойствъ плоскихъ фигуръ. Названіе нагляднаго способа, свойственное пріемамъ Монжа вообще, не характеризуетъ впрочемъ того пріема, помощію котораго свойства одной общей фигуры распространяются на другую столь же общую фигуру. Намъ кажется, что это вполнѣ достигается названіемъ *способа* или *начала случайныхъ соотношеній (principe des relations contingentes).*

Это названіе мы предпочитаемъ названію *начало непрерывности*, такъ какъ послѣднее заключаетъ въ себѣ идею о безконечности, которой вовсе нѣтъ въ способѣ случайныхъ соотношеній. Мы разовьемъ подробнѣе эту мысль въ Примѣчаніи XXIV.

Можно бы привести много примѣровъ на изслѣдованія, въ которыхъ примѣнялось начало случайныхъ соотношеній; но мы напали на новую задачу, на которой особенно удачно можно обнаружить примѣненіе и пользу этого начала; это именно—задача о нахожденіи по величинѣ и направленію трехъ главныхъ осей эллипсоида, когда даны три его сопряженные діаметра. Едва ли эта задача можетъ быть такъ легко рѣшена какимъ бы то ни было другимъ путемъ. (См. Примѣчаніе XXV).

16. Можетъ быть когда нибудь начало случайныхъ соотношеній будетъ сведено къ нѣкоторому метафизическому

принципу о пространствѣ, находящемуся въ связи съ идеей однородности, подобно тому, какъ введены уже такіе принципы въ наукахъ естественныхъ, особенно въ ученіи объ организованныхъ тѣлахъ. Уже и теперь можно замѣтить близость начала случайныхъ соотношеній къ нѣкоторому общему принципу двойственности, обнаруживающемуся во всѣхъ тѣлахъ, гдѣ только можно подмѣтить элементы двоякаго рода: постоянные и измѣняемые, покой и движеніе.

Но и до тѣхъ поръ, пока будетъ найдено доказательство начала случайныхъ соотношеній *a priori*, мы можемъ, кажется, посредствомъ указанныхъ выше аналитическихъ пріемовъ, подтвердить его достаточно, чтобы безъ колебанія пользоваться имъ.

Во всякомъ случаѣ для успѣховъ чистой геометріи было бы весьма выгодно, еслибы не всѣ геометры отказывались окончательно отъ строгихъ началъ древней геометріи и въ то время, какъ одни съ довѣріемъ къ легкимъ пріемамъ Монжа обогащаютъ науку новыми истинами, другіе старались бы доказать эти истины инымъ, совершенно строгимъ путемъ. Такое сотрудничество и такое двоякое направленіе были бы очень полезны для геометріи и способствовали бы обогащенію ея новыми началами и установленію ея истинной метафизики. Дѣйствительно, открывъ какую-нибудь истину посредствомъ способа Монжа, способа, который въ извѣстномъ смыслѣ можно считать поверхностнымъ и въ которомъ мы разсматриваемъ и употребляемъ въ дѣло внѣшнія и наглядныя, но случайныя и измѣняющіяся обстоятельства,—мы должны для установленія этой истинны на неизмѣнныхъ и независимыхъ отъ случайныхъ обстоятельствъ началахъ, обратиться къ самой сущности предмета и, не ограничиваясь уже, какъ Монжъ, второстепенными и случайными свойствами, полезными въ нѣкоторыхъ случаяхъ для разъясненія фигуры, принять въ основаніе только существенныя и постоянныя свойства ея. Подъ существенными и постоянными свойствами мы разумѣемъ такія, которыя могутъ служить для разъясненія и построенія фигуры во всѣхъ возможныхъ

случаяхъ,—тѣ свойства, которыя мы назвали выше существенными, или главными частями фигуры, тогда какъ второстепенныя или случайныя свойства могутъ при извѣстныхъ состояніяхъ фигуры *исчезать* и дѣлаться мнимыми.

Теорія круга на плоскости представляетъ примѣръ установленнаго нами различія между *случайными* и *постоянными* свойствами фигуры. Въ системѣ двухъ круговъ существуетъ одна прямая линія, имѣющая важное значеніе во всей теоріи круга. Когда два круга пересѣкаются, то эта прямая есть ихъ *общая хорда* и этого обстоятельства достаточно для изслѣдованія и построенія ея; но это есть именно одно изъ свойствъ, которыя мы назвали случайными. Если два круга не пересѣкаются, то свойство это исчезаетъ, но прямая, не смотря на это, существуетъ, и ея разсмотрѣніе въ высшей степени полезно для теоріи круга. Поэтому мы должны опредѣлить и построить эту прямую на основаніи какого нибудь другаго ея свойства, которое имѣло бы мѣсто при всевозможныхъ состояніяхъ нашей фигуры, т.-е. при всевозможныхъ положеніяхъ двухъ круговъ. Такое свойство будетъ *постояннымъ*. Руководясь этою мыслію, Готье [3]) назвалъ такую прямую не общею хордою, а *радикальною осью* двухъ круговъ; выраженіе это взято отъ того постояннаго свойства, что касательныя, проведенныя изъ каждой точки этой прямой къ обоимъ кругамъ, равны между собою, такъ что каждая точка ея есть центръ круга, пересѣкающаго данные круги подъ прямыми углами [4]).

---

[3]) *Journal de l'école polytechnique.* 1813. Тетр. 16.

Прекрасный мемуаръ Готье (Gaultier) заключаетъ въ себѣ первое совершенно общее рѣшеніе задачи о прикосновеніи круговъ и шаровъ; рѣшеніе это позволяетъ предполагать, что круги обращаются въ точки, или прямыя линіи, а шары—въ точки или плоскости.

[4]) По причинѣ этого же свойства Штейнеръ назвалъ эту прямую *die Linie der gleichen Potenzen* (См. *Journal von Crelle*, t. I и *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 295).

Прямая эта обладаетъ, какъ извѣстно, еще многими другими замѣчательными постоянными свойствами, которыя достаточны для ея по-

Познаніе существенныхъ и неизмѣняемыхъ свойствъ, къ изысканію которыхъ мы приходимъ при исчезновеніи свойствъ случайныхъ, весьма важно для усовершенствованія геометрическихъ теорій, потому что чрезъ это достигается возможно большая общность и часто наибольшая степень наглядной очевидности, составляющей главный характеръ школы Монжа.

Такимъ образомъ обстоятельство, что *радикальная ось* двухъ круговъ въ случаѣ ихъ пересѣченія есть общая хорда, привела Монжа къ доказательству, что *радикальныя оси* трехъ круговъ, находящихся въ одной плоскости и разсматриваемыхъ какъ діаметральныя сѣченія трехъ шаровъ, должны проходить черезъ *одну и ту же* точку. Теорема эта не менѣе очевидна, когда примемъ за основаніе найденныя Готье постоянныя свойства радикальныхъ осей. Тогда тотчасъ видимъ, что точкѣ пересѣченія двухъ изъ этихъ осей *принадлежитъ характеристическое свойство* третьей оси, т.-е. что эта точка лежитъ также и на третьей оси.

17. **Мнимыя величины въ геометріи.** Ученіе о случайныхъ соотношеніяхъ можетъ, какъ намъ кажется, доставить еще другую выгоду, именно дать удовлетворительное объясненіе слова *мнимый*, употребляемаго теперь въ чистой геометріи; слово это означаетъ мыслимый, но не существующій предметъ, въ которомъ можно предполагать нѣкоторыя свойства, пользоваться имъ на время какъ пособіемъ и примѣнять къ нему такія же разсужденія, какъ къ предметамъ дѣйствительнымъ и вещественнымъ. Такое по-

---

строенія и которыя могли бы также служить для ея опредѣленія. Если напримѣръ проведемъ кругъ, пересѣкающій оба данные круга, то хорды пересѣченія встрѣчаются на этой прямой.

Если черезъ изъ одинъ центровъ подобія двухъ круговъ проведемъ сѣкущую и въ точкахъ пересѣченія построимъ касательныя, то касательныя къ первому кругу встрѣтятся съ непараллельными имъ касательными втораго круга въ двухъ точкахъ, лежащихъ на этой же прямой.

Послѣднее свойство принадлежитъ вообще системѣ двухъ какихъ либо коническихъ сѣченій въ одной плоскости.

нятіе о *мнимомъ*, кажущееся на первый взглядъ неяснымъ и парадоксальнымъ, получаетъ въ теоріи случайныхъ соотношеній смыслъ ясный, точный и законный. (См. Прим. XXVI). Съ этой точки зрѣнія можно считать небезполезнымъ сдѣланное нами раздѣленіе свойствъ фигуръ съ одной стороны на существенныя или постоянныя, съ другой—на измѣнчивыя, случайныя.

18. **Способъ изложенія въ геометріи Монжа.** Начертательная геометрія Монжа представляетъ еще неисчерпанный источникъ прекрасныхъ теорій. Мы указали, что въ ней кроются болѣе и менѣе развитые зачатки многихъ пріемовъ, увеличивающихъ могущество геометріи и расширяющихъ ея область; но кромѣ этого мы видимъ въ ней начало новаго способа изложенія этой науки, какъ на письмѣ, такъ и на словахъ. Изложеніе всегда такъ тѣсно связано съ духомъ способовъ, что необходимо совершенствуется вмѣстѣ съ ними, и въ свою очередь оказываетъ могущественное вліяніе на развитіе и общіе успѣхи науки. Это безспорно и не требуетъ доказательствъ.

Геометрія древнихъ испещрена чертежами. Причина этого очень понятна. При отсутствіи общихъ и отвлеченныхъ началъ всякій вопросъ могъ быть изслѣдованъ только въ отдѣльности, на томъ самомъ чертежѣ, который относился къ вопросу и который одинъ могъ указывать элементы, необходимые для рѣшенія или для доказательства. Нельзя было не испытывать неудобствъ подобнаго пріема, вслѣдствіе трудности построенія нѣкоторыхъ чертежей и вслѣдствіе ихъ сложности, затруднявшей соображеніе и пониманіе. Указываемое нами неудобство особенно ощутительно въ геометріи трехъ измѣреній, гдѣ чертежи становятся иногда совсѣмъ невозможными.

Это неудобство древней геометріи устраняется самымъ удачнымъ образомъ въ аналитической геометріи и въ этомъ заключается одна изъ ея сравнительныхъ выгодъ. Но отсюда возникалъ далѣе вопросъ, не существуетъ ли также и въ чистой геометріи способовъ разсужденія, не требующихъ

безпрерывнаго употребленія чертежей,—употребленія, представляющаго даже при легкомъ построеніи фигуръ существенное неудобство уже потому, что оно утомляетъ умъ и замедляетъ разсужденія.

Этотъ вопросъ разрѣшенъ сочиненіями Монжа и его профессорскою дѣятельностію, пріемы которой сохранены для насъ однимъ изъ самыхъ знаменитыхъ его учениковъ, наслѣдовавшимъ его каѳедру [5]). Благодаря Монжу мы знаемъ, что для этого достаточно теперь, когда начала науки выработались и расширились, пользоваться при геометрическихъ изслѣдованіяхъ и изложеніи ихъ тѣми общими принципами и преобразованіями, которые, подобно тому, какъ въ анализѣ, раскрывая намъ истину въ ея первоначальной чистотѣ и со всевозможныхъ сторонъ, съ особымъ удобствомъ примѣняются къ плодотворнымъ выводамъ, приводящимъ естественнымъ путемъ къ цѣли. Таковъ характеръ ученій Монжа; правда, начертательная геометрія существенно нуждается въ употребленіи чертежей, но это только въ ея приложеніяхъ, гдѣ она играетъ роль пособія. Но никто лучше Монжа не понималъ геометріи безъ чертежей и болѣе его не пользовался ею. Въ Политехнической Школѣ сохраняется преданіе, что Монжъ въ замѣчательной степени обладалъ способностію представлять въ пространствѣ самыя сложныя формы и усматривать ихъ взаимныя соотношенія и самыя скрытыя свойства, прибѣгая при этомъ только къ помощи жестовъ; движеніе его рукъ удивительно помогало изложенію, не всегда быстрому, но всегда проникнутому истиннымъ

---

[5]) Араго, въ настоящее время безсмѣнный секретарь Академіи Наукъ, тотчасъ по выходѣ изъ школы сдѣланъ былъ адъюнктомъ Монжа и вскорѣ послѣ того профессоромъ. Ученыя замѣтки этого знаменитаго астронома въ *Annuaire du bureau des longitudes*, имѣющія назначеніемъ популяризацію въ Европѣ трудной науки о физическихъ явленіяхъ, представляютъ также драгоцѣнный образецъ изложенія безъ чертежей, способный въ высшей степени, по нашему мнѣнію, содѣйствовать успѣхамъ геометріи.

краснорѣчіемъ, свойственнымъ предмету, т.-е. ясностію и отчетливостію, богатствомъ и глубиною мысли.

19. **Вліяніе ученій Монжа на анализъ.** На предыдущихъ страницахъ мы старались по мѣрѣ силъ оцѣнить характеръ и размѣръ услугъ, оказанныхъ Монжемъ раціональной геометріи. Намъ слѣдовало бы еще говорить о вліяніи ихъ на аналитическую геометрію и даже вообще на алгебру, какъ теорію отвлеченныхъ величинъ. Но это отклонило бы насъ отъ цѣли настоящаго сочиненія; притомъ было бы слишкомъ смѣло, еслибы мы, ограничивающіеся ролью историка, рѣшились коснуться предмета уже изслѣдованнаго геометромъ, обладающимъ глубокими и разнообразными познаніями во всѣхъ отдѣлахъ математическихъ и философскихъ наукъ [6]).

Итакъ, мы ограничимся замѣчаніемъ, что алгебра, уже обязанная геометріи значительными успѣхами съ того времени, когда Декартъ совершилъ сліяніе этихъ двухъ наукъ, нашла въ ней новое пособіе, и притомъ въ высшихъ и труднѣйшихъ частяхъ своихъ, именно въ *интегрированіи дифференціальныхъ уравненій со многими перемѣнными*, благодаря глубокомысленному сближенію, установленному Монжемъ между ея символическимъ языкомъ и пространственными формами и величинами.

Укажемъ для примѣра на двоякое аналитическое выраженіе нѣкоторыхъ семействъ поверхностей, съ одной стороны посредствомъ дифференціальнаго уравненія, съ другой—посредствомъ конечнаго уравненія съ произвольными функціями, служащаго полнымъ интеграломъ перваго.

Такимъ образомъ аналитическія формулы отнесены были къ видимымъ предметамъ, всѣ части которыхъ находятся въ соотношеніяхъ доступныхъ очевидности, и отсюда понятно, что геометрія могла оказывать могущественное содѣйствіе

---

[6]) *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, par. M. Ch. Dupin; p. 199—248, ed in—8°.

алгебрѣ; понятно, однимъ словомъ, что *Монжъ могъ дѣлать изслѣдованія въ алгебрѣ при помощи геометріи* [7]).

20. **Успѣхи геометріи, вызванные сочиненіями Монжа.** Изъ всего сказаннаго выше по поводу чисто геометрическихъ ученій Монжа можно, какъ кажется, заключить, что съ появленіемъ *Начертательной Геометріи* мгновенно расширилась, какъ по понятіямъ, такъ и по средствамъ, остававшаяся около вѣка въ пренебреженіи чистая геометрія,—наука, прославившая Евклида, Архимеда, Аполлонія, бывшая въ рукахъ Галилея, Кеплера, Паскаля, Гюйгенса единственнымъ орудіемъ при ихъ великихъ открытіяхъ законовъ природы, наконецъ—наука, породившая безсмертные *Principia* Ньютона.

Понятно, что съ этого времени явилось желаніе и надежда получить раціонально, средствами самой геометріи, тѣ многочисленныя истины, которыми обогатилъ эту науку анализъ Декарта.

Съ этою цѣлію и въ этомъ духѣ были написаны многія сочиненія.

Сочиненія Карно. Прежде всего появились и по своей важности и вліянію заслуживаютъ особаго вниманія сочиненія знаменитаго Карно: *Géométrie de position* и *Essai sur la théorie des transversales*.

Въ исторіи развитія раціональной геометріи эти два сочиненія Карно не должны быть отдѣляемы отъ Начертательной Геометріи Монжа, потому что подобно ей и въ одно съ нею время они явились какъ продолженіе прекрасныхъ методовъ Дезарга и Паскаля и значительно содѣйствовали новымъ теоріямъ и открытіямъ въ геометріи. Изъ того,

---

[7]) „Анализъ можетъ пріобрѣсти весьма значительныя выгоды отъ подобныхъ приложеній къ геометріи; и я даю рѣшеніе многихъ вопросовъ анализа, которые было бы, можетъ быть, очень трудно разрѣшить безъ помощи геометрическихъ соображеній." (Monge; *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes*, въ IX томѣ *Mémoires des savans étrangers*, 1775).

что мы сказали ранѣе о методахъ Дезарга и Паскаля, уже можно было предвидѣть высказываемое теперь сближеніе между доктринами и сочиненіями четырехъ названныхъ великихъ геометровъ,—сближеніе, которымъ указывается, намъ кажется, истинная связь между идеями, руководившими развитіемъ геометріи.

Считаемъ не лишнимъ прибавить еще нѣсколько словъ, чтобы разъяснить подробнѣе наше мнѣніе объ этомъ предметѣ и оправдать только что высказанное сближеніе.

21. **Два рода методовъ въ раціональной геометріи.** Фигуры, разсматриваемыя въ геометріи, и ихъ части представляютъ соотношенія двоякаго рода: одни—касаются формы и положенія фигуръ и называются *начертательными*; другія—относятся къ величинѣ или размѣрамъ фигуръ и называются *метрическими*.

Положимъ, напримѣръ, что мы вращаемъ сѣкущую въ плоскости коническаго сѣченія около неподвижной точки и при каждомъ ея положеніи проводимъ касательныя къ кривой въ точкахъ ея пересѣченія съ вращающеюся прямою: *точки пересѣченія каждой пары касательныхъ будутъ лежать на одной и той же прямой*, именно на *полярѣ* неподвижной точки. Вотъ *начертательное* свойство коническаго сѣченія и *начертательное* соотношеніе между точкою и ея полярой.

Если теперь на сѣкущей въ каждомъ ея положеніи опредѣлимъ точку гармонически сопряженную съ неподвижной точкой относительно двухъ точекъ встрѣчи сѣкущей съ кривою, то *гармонически сопряженная точка будетъ лежать на полярѣ неподвижной точки.* Это—*метрическое* свойство коническаго сѣченія и *метрическое* соотношеніе между точкою и ея полярою.

Какъ начертательныя, такъ и метрическія свойства бываютъ въ отдѣльности достаточны для рѣшенія множества вопросовъ. Но всегда полезно, а часто и необходимо, разсматривать въ одно время и тѣ и другія. Наука о простран-

ствѣ должна включать ихъ въ себѣ безразлично; иначе она была бы неполна.

Отсюда ясно вытекаетъ существованіе двухъ методовъ въ раціональной геометріи, или по крайней мѣрѣ двухъ отдѣловъ одного общаго метода: методъ соотношеній *начертательныхъ* и методъ соотношеній *метрическихъ*. Дезаргъ, Паскаль, Де-Лагиръ и Ле-Пуавръ употребляли оба метода, т.-е. пользовались и тѣми и другими соотношеніями фигуръ, именно—начертательными при преобразованіяхъ фигуръ посредствомъ перспективы, метрическими же — при частомъ употребленіи *гармонической* пропорціи, *инволюціоннаго* соотношенія и другихъ предложеній, относящихся къ теоріи трансверсалей.

Допустивъ такое различіе, мы убѣждаемся, что начертательная геометрія Монжа представляетъ собою чрезвычайно широкое обобщеніе перваго изъ сказанныхъ методовъ, именно метода перспективы, употреблявшагося вышеупомянутыми геометрами для доказательства чисто начертательныхъ свойствъ фигуръ: выше мы показали, что перспектива дѣйствительно можетъ служить для этого употребленія, и, говоря тогда пространно о ея приложеніяхъ къ этого рода вопросамъ, имѣли въ виду оправдать именно теперешнія наши слова.

Что касается теоріи трансверсалей, сперва заключавшейся въ *Géométrie de Position*, а потомъ изложенной въ особомъ сочиненіи, то мы уже говорили и доказали, что ея основныя начала и многія изъ главныхъ ея предложеній лежали въ основаніи открытій Дезарга и Паскаля; поэтому мы должны смотрѣть на теорію трансверсалей, какъ на развитіе и осуществленіе началъ, которыми пользовались эти два великіе геометра.

Такимъ образомъ можно сказать, что способы Монжа и Карно являются въ раціональной геометріи какъ обобщеніе и непосредственное усовершенствованіе методовъ Дезарга и Паскаля; что это—двѣ отрасли одного общаго метода, имѣющія каждая свои собственныя преимущества, но которыя не должны быть раздѣляемы при всестороннемъ изученіи

свойствъ пространства. Напротивъ того, было бы въ высшей степени выгодно развивать ихъ одновременно и, такъ сказать, параллельно; они помогали бы другъ другу и развитіе науки шло бы отъ этого полнѣе и быстрѣе [8]). Монжъ и изъ учениковъ его преимущественно Дюпенъ, авторъ *Développements* и *Applications de Géométrie*, дали намъ примѣръ такого соотвѣтствія двухъ методовъ, установивъ соотвѣтствіе между логическими пріемами чистой геометріи и отвлеченнымъ и символическимъ языкомъ алгебры.

22. Мы не можемъ входить здѣсь въ разборъ многочисленныхъ и важныхъ предложеній, которыми изобилуютъ оба сочиненія Карно; ограничимся указаніемъ на прекрасное общее свойство геометрическихъ кривыхъ, какой угодно степени, относительно отрѣзковъ, образуемыхъ такою кривою на сторонахъ многоугольника, лежащаго въ ея плоскости; это свойство представляетъ распространеніе теоріи трансверсалей на кривыя высшихъ порядковъ и изъ него, какъ частный случай, получается третья теорема Ньютона о произведеніи отрѣзковъ, образуемыхъ кривою на параллельныхъ сѣкущихъ.

Различныя сочиненія по геометріи. Перейдемъ къ сочиненіямъ, которыя послѣ сочиненій Монжа и Карно

---

[8]) Сочиненія Монжа и Карно представляютъ прекрасные примѣры примѣненія обоихъ методовъ къ доказательству тѣхъ же самыхъ теоремъ и обнаруживаютъ пользу ихъ одновременнаго употребленія: такъ Карно дѣлаетъ приложеніе теоріи трансверсалей ко многимъ свойствамъ коническихъ сѣченій и къ свойствамъ радикальныхъ осей и центровъ подобія трехъ круговъ на плоскости; Монжъ тѣже предложенія доказалъ чисто геометрическими соображеніями. Но Карно, пользуясь метрическими соотношеніями фигуръ, получаетъ вмѣстѣ съ теоремами Монжа еще другія, именно метрическія, свойства, которыя вообще ускользаютъ отъ другаго метода, основаннаго исключительно на чисто начертательныхъ свойствахъ фигуръ.

Говоря выше о принципѣ случайныхъ соотношеній, мы уже высказали нѣсколько соображеній о этихъ двухъ различныхъ пріемахъ геометрическаго изслѣдованія и доказательства.

были наиболѣе полезны для науки. Таковы по нашему мнѣнію слѣдующія:

Интересный опытъ геометріи линейки подъ заглавіемъ: *Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique*, de Servois (in—8°, an XII); здѣсь Сервуа соединяетъ важнѣйшія теоремы теоріи трансверсалей и показываетъ примѣненіе ихъ какъ къ раціональной геометріи при доказательствѣ предложеній, такъ и къ геометріи практической при рѣшеніи на поверхности почвы различныхъ задачъ, преимущественно военныхъ.

Développement и *Applications de Géométrie* de M. Ch.Dupin, гдѣ въ первый разъ изслѣдованы чисто геометрическимъ путемъ трудные вопросы о кривизнѣ поверхностей, для рѣшенія которыхъ Эйлеръ и Монжъ должны были прибѣгать къ высшему анализу.

Eléments de Géométrie á trois dimensions de Hachette (часть синтетическая), гдѣ посредствомъ соображеній чисто-геометрическихъ разрѣшены во всей общности многіе вопросы о касательныхъ и соприкасающихся кругахъ въ кривыхъ линіяхъ,—вопросы, которые до тѣхъ поръ рѣшались только аналитически.

Mémoire sur les lignes du second ordre de Brianchon, гдѣ въ первый разъ изъ знаменитой теоремы Дезарга о инволюціи шести точекъ выведены многочисленныя свойства коническихъ сѣченій.

Mémoire sur l'application de la théorie des transversales того же автора [9]).

---

[9]) Это сочиненіе, подобно сочиненію Сервуа, имѣетъ предметомъ рѣшеніе многихъ задачъ при помощи одной прямой линіи. Бріаншонъ занимался этимъ же отдѣломъ геометріи въ сочиненіи *Géométrie de la règle* (*Correspondance sur l'école polytechnique,* t. II, p. 383).

Геометрія этого рода не есть новость. Мы упоминали уже о сочиненіи Шутена по этому предмету и о сочиненіи *Geometria peregrinans*, которое появилось еще нѣсколько ранѣе. Въ трактатѣ Шутена *De concinnandis demonstrationibus etc*, есть также нѣсколько примѣровъ изъ этого отдѣла геометріи; другіе примѣры встрѣчаемъ въ *Récréations*

Traité des propriétés projectives des figures de Poncelet имѣетъ цѣлію, какъ видно изъ заглавія, изысканіе такихъ свойствъ, которыя сохраняются при преобразованіи фигуръ посредствомъ перспективы; искусно пользуясь тремя могущественными орудіями: *началомъ непрерывности*, теоріею *взаимныхъ поляръ* и теоріею *гомологическихъ фигуръ* двухъ и трехъ измѣреній, ученый авторъ съумѣлъ доказать, безъ одной буквы вычисленія, всѣ извѣстныя свойства линій и поверхностей втораго порядка и еще большое число новыхъ, изъ которыхъ многія уже разсматриваются какъ наиболѣе важныя предложенія этой богатой теоріи.

Различные мемуары Жергонна, Кетле, Данделена и другихъ геометровъ, появившіеся въ ученыхъ журналахъ [10]),

---

mathématiques d'Ozanam (éd. 1778) и въ различныхъ сочиненіяхъ по землемѣрію, особенно въ сочиненіи Машерони: *Problèmes pour les arpenteurs, avec différentes solutions* (Pavie, 1793).

Здѣсь кстати упомянуть объ оригинальномъ и любопытномъ сочиненіи Машерони: *Géométrie du compas*, въ которомъ рѣшаются при помощи одного циркуля задачи, обыкновенно рѣшаемыя помощію линейки и циркуля. Такая геометрія циркуля богаче и обширнѣе, нежели геометрія линейки, потому что обнимаетъ задачи второй степени, составляющія главное содержаніе обыкновенной геометріи. Машерони показываетъ, что она также прилагается, и очень удобно, къ приблизительному рѣшенію вопросовъ, зависящихъ отъ коническихъ сѣченій и высшихъ кривыхъ.

Еще гораздо ранѣе интересовали знаменитыхъ геометровъ подобныя попытки, именно изслѣдованія, занимающія такъ сказать средину между геометріею линейки и геометріею циркуля. Карданъ первый рѣшилъ нѣсколько задачъ Евклида при помощи линейки и циркуля съ постояннымъ отверстіемъ, какъ бы въ предположеніи, что на практикѣ даны только линейка и циркуль съ неизмѣннымъ отверстіемъ. Тарталеа не замедлилъ вступить на тотъ же путь вслѣдъ за своимъ соперникомъ и распространилъ такой же пріемъ на новыя задачи (*General trattato di numeri e misure; 5-ta parte, libro terzo;* in-fol. Венеція, 1560). Тотъ же предметъ составляетъ наконецъ содержаніе трактата піемонтскаго геометра Бенедиктиса: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum, unà tantummodo circini datâ aperturâ;* in—4°. Венеція, 1553).

[10]) *Journal* и *Correspondance de l'école polytechnique; Annales* de

также содѣйствовали развитію науки и обогатили ее драгоцѣнными открытіями.

23. **Новѣйшіе методы въ геометріи.** Всѣ перечисленныя нами сочиненія доставляютъ многочисленныя и убѣдительныя доказательства того, что чистая геометрія въ себѣ самой можетъ почерпать безконечное разнообразіе пріемовъ и методовъ; въ этихъ сочиненіяхъ появились тѣ простыя и плодотворныя истины, которыя однѣ могутъ свидѣтельствовать о совершенствѣ науки и быть ея дѣйствительными основаніями,—появились теоріи, зародышъ которыхъ впродолженіи вѣковъ скрывался незамѣченнымъ въ трудахъ прежнихъ геометровъ; эти теоріи развились быстро и легли въ основаніе методовъ новѣйшей геометріи.

Мы различаемъ между этими методами:

Вопервыхъ, теорію транверсалей, которой основная теорема о треугольникѣ пересѣченномъ транверсалью восходитъ до глубокой древности, но которую Карно вызвалъ къ новой жизни, показавъ всю пользу и плодотворность ея и распространивъ ея путемъ чрезвычайно счастливаго обобщенія на теорію кривыхъ линій и поверхностей [11]).

Вовторыхъ, ученіе о преобразованіи фигуръ въ другія такого же рода, какъ въ перспективѣ.

Изъ этого рода методовъ укажемъ слѣдующія:

Gergonne; *Correspondance mathématique et physique* de Quetelet; *Journal für Mathematik* v. Crelle.

Многіе нѣмецкіе геометры: Штейнеръ, Плюкеръ, Мёбіусъ и др. достойные сотрудники знаменитыхъ аналистовъ Гаусса, Крелля, Якоби, Лежена-Дирикле и пр. писали въ послѣднемъ изъ указанныхъ изданій о новыхъ ученіяхъ раціональной геометріи. Мы испытываемъ живое сожалѣніе, что не можемъ дать здѣсь обзора этихъ сочиненій, которыя намъ неизвѣстны по причинѣ незнакомства съ нѣмецкимъ языкомъ.

[11]) Подобная же теорема объ отрѣзкахъ, образуемыхъ на сторонахъ треугольника прямыми, проведенными изъ одной точки къ вершинамъ треугольника, относится также къ основнымъ теоремамъ *теоріи трансверсалей.* Ее приписывали до сихъ поръ Ивану Бернулли, но она въ первый разъ была доказана Чевой (См. Прим. VII).

1°. Перспектива, начала которой лежатъ въ основаніи сочиненій Дезарга и Паскаля о коническихъ сѣченіяхъ и употребленіе которой съ тѣхъ поръ расширилось и часто повторялось.

2°. Способъ, въ которомъ лучи зрѣнія, идущіе къ различнымъ точкамъ фигуры, увеличиваются въ постоянномъ отношеніи для полученія фигуры подобной и подобно-расположенной.

3°. Способъ, въ которомъ ординаты точекъ фигуры увеличиваются пропорціонально, какъ это дѣлается напримѣръ при изображеніи профилей, когда хотятъ сдѣлать измѣненія въ высотѣ болѣе наглядными; этотъ способъ употребляли Дюреръ [12]), Порта [13]), Стевинъ, Мидоржъ и Григорій С. Винцентъ для полученія эллипса изъ круга [14]).

4°. Способъ, въ которомъ всѣ ординаты фигуры, оставаясь параллельными, наклоняются обращеніемъ около ихъ основаній на плоскости проэкцій; этотъ пріемъ употребляется преимущественно въ архитектурѣ при построеніи мостовъ [15]).

5°. Способъ построенія барельефовъ, указанный Боссомъ и Петито [16]); и также способъ, предложенный позднѣе Брей-

---

[12]) *Institutiones geometricae.* L. I.

[13]) *Elementa curvilinea.* L. I.

[14]) P. Nicolas въ сочиненіи *De conchoidibus et cissoidibus exercitationes geometricae* (in—4°, Tolosae, 1692) также употреблялъ этотъ способъ; кривыя, получаемыя при этомъ, онъ называлъ *однородными* (*homogènes*).

[15]) Ординаты можно въ то же время пропорціонально увеличивать. Гашеттъ употреблялъ такое преобразованіе въ двухъ предложеніяхъ для доказательства, что свойствомъ стереографической проэкціи сферы могутъ обладать только поверхности втораго порядка. (См. *Correspondance polytechnique,* t I, p. 77).

Легко видѣть, что такое преобразованіе можетъ быть приведено къ измѣненію въ постоянномъ отношеніи ординатъ поверхности, имѣющихъ неизмѣнное направленіе,

[16]) Обыкновенно думаютъ, что построеніе барельефовъ не подчиняется точнымъ правиламъ; два вѣка тому назадъ большинство художниковъ думали то же самое о перспективѣ. Однако Боссъ далъ нѣсколько

зигомъ (Breysig) въ его теоріи перспективы для живописцевъ (in-8°, Магдебургъ, 1798) [17].

6°. Способъ *planiconiques* Де-Лагира и способъ Ле-Пуавра, которые оба имѣютъ предметомъ черченіе на плоскости основанія конуса тѣхъ же кривыхъ, которыя получаются на самомъ конусѣ отъ пересѣченія его плоскостями.

7°. Способъ Ньютона для преобразованія фигуръ въ другія того же рода, заключающійся въ 22-й леммѣ первой книги *Principia*, впослѣдствіи обобщенный Варингомъ [18].

геометрическихъ правилъ построенія барельефа, какъ это видно изъ его сочиненія Traité des pratiques géométrales et perspectives (in—8°, 1665). Въ одномъ мѣстѣ этого сочиненія сказано, что Дезаргъ, которому принадлежитъ честь введенія въ строительное искусство геометрическихъ началъ со всею ихъ строгостію, прилагалъ свой способъ перспективы къ построенію барельефовъ. Позволительно думать, что Боссъ передаетъ намъ идеи Дезарга или даже самый пріемъ его.

Далѣе встрѣчаемъ подобныя же правила для барельефовъ въ трактатѣ о перспективѣ Петито, подъ заглавіемъ: *Raisonnement sur la perspective, pour en faciliter l'usage aux artistes*; in—fol. Парма, 1758 (по-французски и по-итальянски).

Правила построенія барельефовъ представляютъ преобразованіе фигуръ въ другія такого же рода и потому должны быть включены въ наше перечисленіе методовъ. Правда, что они почти никому неизвѣстны и никогда не употреблялись въ раціональной геометріи для изысканія и доказательства свойствъ фигуръ; тѣмъ не менѣе они могутъ служить для такого назначенія.

[17]) Сочиненіе Брейзига извѣстно намъ только по заглавію, упоминаемому Понселе (Crelle's *Journal*, t. 8, p. 397); но мы безъ колебаній относимъ содержащееся тамъ построеніе рельефовъ къ числу способовъ преобразованія фигуръ трехъ измѣреній въ другія того же рода, потому что Понселе заявляетъ, что пріемы автора согласны съ его собственными способами построеній этого рода.

[18]) Варингъ употребляетъ соотношенія

$$x=\frac{px'+qy'+r}{Ax'+By'+C}, \qquad y=\frac{Rx'+Qy'+R}{Ax'+By'+C},$$

въ которыхъ x, y суть координаты точки данной кривой, а x', y' координаты точки кривой преобразованной.

8° Способъ, помощію котораго мы распространили на эллипсоидъ свойство сферы и который заключается въ томъ, что координаты точекъ данной фигуры увеличиваются въ постоянныхъ отношеніяхъ (*Correspondance sur l'école polytechnique*, t. III, p. 326) [19]).

Прибавленіе. Клеро еще прежде изслѣдовалъ кривыя, названныя Эйлеромъ *lineae affines*: онъ разсматривалъ ихъ какъ проэкціи одна другой, т.-е. какъ плоскія сѣченія одного цилиндра, и назвалъ кривыми *одного рода* (*de même espèce*). Онъ показалъ, что если x, y будутъ координаты точки одной кривой относительно осей въ ея плоскости, то координаты для другой кривой относительно осей, взятыхъ въ ея плоскости соотвѣтственно первымъ осямъ, будутъ вида $X=\lambda x$, $Y=\lambda y$. Это доказываетъ, что кривыя Клеро — тоже что и кривыя Эйлера (См. *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1731).

9°. Наконецъ, прекрасная теорія *гомологическихъ фигуръ* или *перспективы-рельефа*, данная Понселе; она совпадаетъ со способами Де-Лагира и Ле-Пуавра въ случаѣ плоскихъ фигуръ, но до Понселе не была распространена на фигуры трехъ измѣреній [20]).

Онъ даетъ это преобразованіе какъ обобщеніе Ньютонова преобразованія, въ которомъ

$$x=\frac{r}{x'}, \qquad y=\frac{Qy'}{x'}$$

(*Principia*, lib. I, lemma 22), и ограничивается указаніемъ, что новая кривая будетъ той же степени какъ и данная (*Miscellanea analytica* p. 82; *Proprietates curvarum algebraicarum*, p. 240).

Мы докажемъ, что построенныя такимъ образомъ кривыя, также какъ и кривыя Ньютона, могутъ быть получены посредствомъ перспективы; такимъ образомъ *обобщеніе Варинга касается только положенія новой кривой относительно данной, но не касается ни формы, ни отличительныхъ особенностей ея.*

[19]) Эйлеръ указалъ этотъ способъ преобразованія для плоскихъ кривыхъ, но безъ приложеній: по его выраженію кривыя, получаемыя такимъ образомъ одна изъ другой, находятся въ *сродствѣ* (*affinitas*) и онъ называетъ ихъ *lineae affines. (Introductio in analysin infinitorum*, lib II, art 442).

[20]) Въ недавнее время Ле-Франсуа воспользовался теоріею *гомологическихъ* фигуръ для преобразованія нѣкоторыхъ кривыхъ третьяго по-

Всѣ эти разнообразные способы мы соединяемъ въ одну группу и ниже покажемъ, что всѣ они, также какъ и перспектива въ собственномъ смыслѣ, вытекаютъ изъ одного общаго основнаго принципа, представляя его частныя примѣненія.

Въ третьихъ, теорія взаимныхъ поляръ, которую ученики Монжа почерпнули изъ драгоцѣнныхъ уроковъ этого знаменитаго профессора, которая сначала примѣнялась только къ такимъ преобразованіямъ, гдѣ прямымъ соотвѣтствуютъ точки, а точкамъ—прямыя (см. Прим. XXVI), и на которую Понселе привлекъ все вниманіе геометровъ, примѣнивъ ее къ преобразованію метрическихъ и угловыхъ соотношеній.

Въ четвертыхъ, ученіе о стеографическихъ проэкціяхъ; сначала оно относилось только къ сферѣ и служило для черченія географическихъ картъ; обогатившись потомъ одною новою теоремой, оно распространилось вообще на поверхности втораго порядка и въ настоящее время представляетъ простое и удобное средство для изысканій [21]). Мемуары

рядка, преимущественно *фокальныхъ линій* Кетле и Фанъ-Риса. (*Dissertatio inauguralis mathematica de quibusdam curvis geometricis;* in—4^0 Gand. 1830). Пріемъ этого геометра отличается отъ способа Понселе тѣмъ, что для построенія гомологическихъ кривыхъ употребляется здѣсь одно изъ ихъ метрическихъ соотношеній. Это соотношеніе, именно—*гармоническое,* не есть самое общее: можно пользоваться отношеніемъ *ангармоническимъ,* которое сообщаетъ построенію фигуръ болѣе общности. Къ этому вопросу мы возвращаемся въ нашемъ мемуарѣ о *гомографическомъ преобразованіи.*

Такъ какъ главная часть этого мемуара посвящена изслѣдованію метрическихъ соотношеній, то мы позволяемъ себѣ напомнить здѣсь, что нашъ мемуаръ представленъ въ Брюссельскую Академію въ январѣ 1830 года, т.-е. ранѣе появленія диссертаціи г. Ле-Франсуа, которую мы получили отъ автора позднѣе.

[21]) Теорія стереографическихъ проэкцій сферы въ томъ видѣ, какъ она употребляется теперь въ чистой геометріи, основывается на двухъ слѣдующихъ принципахъ:

1^0 *Проэкція всякаго круга, проведеннаго на сферѣ, есть кругъ.*

2^0. *Центръ этого круга есть проэкція вершины конуса, огибающаго сферу по пролагаемому кругу.*

Брюссельской Академіи содержатъ особенно много удачныхъ приложеній этой изящной теоріи, сдѣланныхъ Кетле и Данделеномъ.

24. Таковы четыре обширныя группы, въ которыя по нашему мнѣнію можно при современномъ состояніи геометріи, разсматривая методы съ философской точки зрѣнія, соединить большинство новѣйшихъ многочисленныхъ открытій. Къ пятой группѣ можно отнести еще нѣкоторыя частныя и спеціальныя теоріи, основанныя на чисто-геометрическихъ началахъ. Таковы, между прочимъ, теорія *Сопряженныхъ касательныхъ* Дюпена, изъ которой авторъ извлекъ весьма полезныя теоретическія и практическія приложенія, и новая теорія *каустическихъ линій*, въ которой Кетле свелъ на немногіе принципы начальной геометріи эту важную и трудную часть оптики, не поддававшуюся всѣмъ средствамъ анализа.

Эти теоріи, которыя на первый взглядъ кажутся чуждыми перечисленнымъ выше методамъ, съ нѣкоторыхъ точекъ зрѣнія могутъ связываться съ ними и могутъ въ нихъ находить полезную помощь. Любопытныя сближенія, которыя Кетле дѣлаетъ между своею теоріею каустическихъ линій и теорію стереографическихъ проэкцій, служатъ этому первымъ доказательствомъ; другія доказательства мы будемъ имѣть случай сообщить въ другомъ мѣстѣ [22]).

Вторая теорема, столь же важная какъ и первая, стала извѣстна только нѣсколько лѣтъ тому назадъ; въ первый разъ мы высказали и аналитически доказали ее въ изданіи 1817 года *Eléments de Géométrie à trois dimensions* de Hachette. Потомъ путемъ геометрическихъ соображеній, мы примѣнили теорію стереографическихъ проэкцій ко всякой поверхности втораго порядка и обобщили эту теорію въ двухъ отношеніяхъ: 1°) разсматривая, вмѣсто плоскихъ сѣченій, поверхности втораго порядка, вписанныя въ данную, 2°) принимая за плоскость проэкціи какую угодно плоскость. (См. *Annales de Mathématiques*, t. XVIII, p. 305 и t. XIX, p. 157).

[22]) Такъ напримѣръ, Дюпенъ въ своемъ прекрасномъ сочиненіи *Théorie géométrique de la courbure des surfaces* не вполнѣ освободился отъ аналитическихъ соображеній при доказательствѣ такого предложе-

25. Усовершенствованіе новыхъ методовъ. Основательное изученіе современнаго состоянія чистой геометріи оправдываетъ предложенное нами систематическое дѣленіе, но въ то же время оно въ виду недостатка общности и опредѣленнаго характера во множествѣ теоремъ, относящихся къ указаннымъ методамъ, обнаруживаетъ, что самые эти методы не достигли еще въ желаемой степени общности, плодотворности и силы.

Такъ напримѣръ способы, заключающіеся во второй и третьей группѣ нашего дѣленія, имѣютъ общее и удобное примѣненіе къ изысканію и доказательству *начертательныхъ* свойствъ фигуръ, но до сихъ поръ они имѣли только весьма ограниченное приложеніе къ *метрическимъ* соотношеніямъ (къ опредѣленію величины линій, поверхностей и объемовъ).

нія: „Двѣ поверхности втораго порядка, которыхъ главныя сѣченія имѣютъ одни и тѣ же фокусы, пересѣкаются во всѣхъ точкахъ подъ прямымъ угломъ". Новѣйшіе методы различнымъ образомъ ведутъ къ чисто-геометрическому доказательству этой теоремы.

Чтобы дать примѣръ силы этихъ методовъ, скажемъ, что съ помощію ихъ достигается также легко доказательство слѣдующаго гораздо болѣе общаго предложенія: *Если главныя сѣченія двухъ поверхностей втораго порядка имѣютъ одни и тѣ же фокусы, то контуры, получаемые при разсматриваніи этихъ поверхностей изъ какой угодно точки пространства, пересѣкаются между собою подъ прямыми углами.*

Прибавимъ еще, что прекрасные результаты, заключающіеся въ мемуарѣ Бине *Sur les axes conjugués et les moments d'inertie des corps* (*Journal de l'école polytechnique*, 16-е cahier), гдѣ авторъ пользуется вышеупомянутою теоремою Дюпена, и подобные же результаты, полученные Амперомъ въ мемуарѣ: *Quelques propriétés nouvelles des axes permanents de rotation des corps*,—всѣ эти прекрасныя открытія, причисляемыя къ области механики и сдѣланныя авторами при помощи анализа, могутъ также быть получены путемъ чисто-геометрическимъ; слѣдуетъ, можетъ быть, признать, что такой путь естественнѣе соединяетъ эти разнообразныя открытія съ истинами, лежащими въ ихъ основѣ, лучше указываетъ связь ихъ между собою и ведетъ къ болѣе удобному и болѣе раціональному изложенію ихъ.

Такимъ образомъ геометрія, расширяя свои границы, всегда вноситъ свой свѣточъ во всякій новый отдѣлъ физико-математическихъ наукъ.

Не заставляетъ ли это предполагать въ нихъ недостатокъ нѣкотораго принципа, который сдѣлалъ бы ихъ приложимыми къ гораздо болѣе общимъ, а можетъ быть и ко всякаго рода соотношеніямъ?

Очевидно, что эти методы не основываются еще на достаточно широкихъ началахъ. И дѣйствительно, мы вправѣ кажется сказать, что каждый изъ нихъ допускаетъ весьма широкое обобщеніе.

26. **Теорія трансверсалей.** Прежде всего, теорія трансверсалей можетъ быть обогащена новыми принципами, которые сдѣлаютъ ее способной къ новымъ примѣненіямъ и дадутъ ей возможность въ тысячѣ случаевъ замѣнять анализъ Декарта, преимущественно при изученіи общихъ свойстъ геометрическихъ кривыхъ; даже въ теперешнемъ своемъ состояніи она можетъ быть полезна во многихъ вопросахъ, къ которымъ до сихъ поръ еще не прилагалась, такъ напримѣръ въ общей задачѣ о *касательныхъ* и о *радіусахъ кривизны* во всѣхъ геометрическихъ кривыхъ,—задача, рѣшеніе которой мы дали въ *Bulletin universel des sciences* (juin, 1830) [23]).

---

[23]) *Построеніе касательныхъ.* Чтобы опредѣлить касательную въ точкѣ m геометрической кривой какого угодно порядка, проведемъ черезъ эту точку по произвольнымъ направленіямъ двѣ трансверсали mA, mA'; составимъ произведенія отрѣзковъ, образующихся на этихъ прямыхъ между точкою m и всѣми другими точками пересѣченія ихъ съ кривою; пусть эти два произведенія будутъ P и P'.

Черезъ произвольную точку u проводимъ двѣ трансверсали параллельныя прямымъ mA, mA'; составляемъ произведенія отрѣзковъ, образующихся на нихъ между точкою u и кривою; пусть эти произведенія будутъ Π и Π'.

Отложимъ на прямыхъ mA, mA', начиная отъ точки m, соотвѣтственно два отрѣзка, пропорціональные отношеніямъ $\frac{\Pi}{P}$, $\frac{\Pi'}{P'}$: —*прямая, соединяющая концы этихъ отрѣзковъ, будетъ параллельна касательной въ точкѣ m.*

Такимъ образомъ направленіе касательной опредѣлено.

27. **Стереографическія проэкціи.** Ученіе о стереографическихъ проэкціяхъ, уже расширенное примѣненіемъ ко всѣмъ поверхностямъ втораго порядка, способно къ даль-

---

Можно также построить прямо направленіе нормали. Для этого на двухъ трансверсаляхъ, выходящихъ изъ точки m, откладываемъ отрѣзки пропорціональные отношеніямъ $\frac{P}{\Pi}$, $\frac{P'}{\Pi'}$; черезъ концы этихъ отрѣзковъ и черезъ точку m проводимъ кругъ: *центръ его будетъ лежать на нормали къ кривой въ точкѣ m.*

Построеніе круговъ кривизны. Чтобы опредѣлить кругъ кривизны въ точкѣ m геометрической кривой, проведемъ черезъ эту точку касательную къ кривой и какую-нибудь трансверсаль mA; составимъ произведеніе отрѣзковъ, заключающихся на этихъ двухъ прямыхъ между точкою m и другими вѣтвями кривой. Пусть T и P будутъ эти произведенія.

Черезъ произвольную точку μ проведемъ двѣ прямыя, параллельныя касательной и трансверсали; составимъ произведеніе отрѣзковъ на этихъ параллеляхъ между точкою μ и кривою; пусть эти произведенія будутъ $\Tau$ и Π.

Отложимъ на трансверсали mA отрѣзокъ равный $\frac{P}{\Pi} \cdot \frac{\Tau}{T}$: *конецъ этого отрѣзка будетъ лежать на искомомъ кругѣ кривизны.*

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что, если означимъ черезъ Θ уголъ между трансверсалью mA и касательной, величина R радіуса кривизны будетъ: $R = \frac{1}{2\sin\Theta} \cdot \frac{P}{\Pi} \cdot \frac{\Tau}{T}$

Если кривая m-ой степени, то произведенія $\Tau$ и Π будутъ состоять изъ m линейныхъ множителей, P—изъ $m-1$, а T—изъ $m-2$.

Когда кривая начерчена, то эти множители будутъ отрѣзки на трансверсаляхъ; если же кривая дана уравненіемъ, то изъ него найдемъ непосредственно величины четырехъ произведеній P, T, Π, $\Tau$, какъ это извѣстно изъ общей теоріи уравненій.

Кривая должна быть начерчена вполнѣ, т.-е. со всѣми своими вѣтвями, чтобы число точекъ пересѣченія съ трансверсалями соотвѣтствовало порядку кривой. Если, напримѣръ, кривая принадлежитъ къ числу линій четвертаго порядка, называемыхъ *овалами Декарта*, то нужно знать и второй *сопутствующій* овалъ (compagne), обладающій тѣми же свойствами; онъ не указывается въ построеніяхъ данныхъ Декартомъ и другими геометрами, но заключается въ томъ же уравненіи (См. Прим. XXI).

нѣйшему обобщенію, состоящему въ томъ, что точка зрѣнія можетъ быть помѣщена не на поверхности сферы, а въ какой угодно точкѣ пространства, или даже въ безконечности. При этомъ плоскія сѣченія поверхности втораго порядка уже не будутъ давать въ проэкціи подобныя и подобно-расположенныя коническія сѣченія, или коническія сѣченія, имѣющія общую ось подобія (axe de symptose); зависимость между этими кривыми будетъ имѣть болѣе сложное выраженіе; онѣ будутъ имѣть двойное прикосновеніе (дѣйствительное или мнимое) съ коническимъ сѣченіемъ, представляющимъ видимый перспективный контуръ поверхности втораго порядка (это коническое сѣченіе само можетъ быть мнимымъ).

Эта теорема предложена въ *Traité des propiétés projectives* (n° 610) и Понселе показалъ примѣненіе ея къ изученію свойствъ системы коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное прикосновеніе съ даннымъ. Если къ этой теоремѣ присоединить, какъ въ теоріи обыкновенной стереографической проэкціи, другую теорему о проэкціяхъ вершинъ конусовъ, огибающихъ поверхность втораго порядка, то получится новая теорія, представляющая поле для неисчерпаемыхъ и интересныхъ изысканій,—теорія, при помощи которой будетъ разрѣшено множество вопросовъ о построеніи коническихъ сѣченій при различныхъ условіяхъ. (См. Примѣчаніе XXVIII).

Предыдущія построенія могутъ быть упрощены, потому что вмѣсто четырехъ попарно параллельныхъ трансверсалей можно провести только три, изъ которыхъ двѣ должны выходить изъ разсматриваемой точки кривой, а третья можетъ быть проведена произвольно. Это видоизмѣненіе въ рѣшеніи разсматриваемыхъ задачъ основывается на прекрасномъ общемъ свойствѣ геометрическихъ кривыхъ, данномъ Карно въ *Géométrie de position*, p. 291.

Понселе также даетъ построеніе касательныхъ къ геометрическимъ кривымъ въ мемуарѣ, представленномъ Парижской Академіи Наукъ оъ сентябрѣ 1831 года: *Analyse des transversales, appliquée à la recherche des propriétes projectives des lignes et surfaces géometriques* (Crelle's Journal, t. VII, p. 229).

28. **Способы преобразованія фигуръ.** Способы, соединенные нами во вторую группу, повидимому чужды одинъ другому и назначены для различныхъ практическихъ примѣненій; но если смотрѣть на нихъ какъ на способы *преобразованія фигуръ*, то всѣ они могутъ быть сведены къ одному, замѣняющему ихъ вполнѣ, принципу *преобразованія;* этотъ принципъ, по нашему мнѣнію, представляетъ новое ученіе въ высшей степени важное, допускающее болѣе широкое и удобное употребленіе, чѣмъ всѣ эти различные способы. Оно можетъ быть основано на одной теоремѣ, на которую мы смотримъ какъ на послѣднее обобщеніе и какъ на первоначальный источникъ всѣхъ принциповъ, породившихъ вышеперечисленные методы. Прибавимъ, что всѣ другіе подобные методы преобразованіч фигуръ въ другіе того же рода, которые могутъ быть открыты впослѣдствіи, будутъ не болѣе какъ выводы изъ этой единственной теоремы.

29. **Взаимныя поляры и другіе подобные методы. Начало двойственности.** Что касается теоріи взаимныхъ поляръ, служащей для преобразованія фигуръ въ другія разнородныя съ ними (въ нихъ плоскости и точки соотвѣтствуютъ точкамъ и плоскостямъ данныхъ фигуръ) и для превращенія свойствъ данныхъ фигуръ въ свойства фигуръ преобразованныхъ, въ чемъ и выражается постоянная *двойственность* формъ и свойствъ пространства,— то мы уже высказали (*Annales de Mathématiques*, t. XVIII, p. 270), что эта теорія не есть единственный способъ для этой цѣли: существуетъ много другихъ способовъ, обнаруживающихъ ясно туже *двойственность* и столь же удобныхъ для приложеній.

Такъ, *двойственность* уже два вѣка тому назадъ [24]) была

---

[24]) Мы уже говорили, что теорема, на которой основывается двойственность этого рода, дана была Снелліемъ и что открытіе ея было подготовлено преобразованіемъ сферическихъ треугольниковъ, которое употреблялъ Вьетъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ сферической тригонометріи.

усмотрѣна въ геометріи сферы, гдѣ каждая фигура имѣетъ свою *дополнительную* (*supplémentaire*), въ которой дуги большихъ круговъ соотвѣтствуютъ точкамъ первоначальной фигуры и дуги эти проходятъ черезъ одну точку, если точки первоначальной фигуры лежатъ на одномъ большомъ кругѣ; эта *двойственность* на сферѣ съ совершенною очевидностію обнаруживаетъ также *двойственность* и плоскихъ фигуръ и даетъ очень удобное средство для преобразованія ихъ.

Дѣйствительно, представимъ себѣ на сферѣ какую-нибудь фигуру и ея *дополнительную* (т.-е. фигуру огибающую дуги большихъ круговъ, которыхъ плоскости перпендикулярны къ радіусамъ проведеннымъ въ точки первой фигуры); сдѣлаемъ перспективу обѣихъ фигуръ на плоскость, помѣстивъ глазъ въ центрѣ сферы; въ перспективѣ получаемъ двѣ взаимныя фигуры и въ нихъ законъ *двойственности* очевиденъ.

Но нетрудно видѣть, что такое преобразованіе плоской фигуры можетъ быть выполнено прямо въ ея плоскости безъ пособія вспомогательной сферы. Дѣйствительно, перпендикуляры, опущенные изъ каждой точки начальной фигуры на соотвѣтственныя этимъ точкамъ прямыя второй фигуры, проходятъ чрезъ одну и ту же точку, именно чрезъ ортогональную проэкцію центра сферы на плоскости фигуры; въ этой точкѣ каждый перпендикуляръ дѣлится на два отрѣзка, произведеніе которыхъ постоянно, ибо оно равно квадрату разстоянія центра сферы отъ плоскости фигуры. Слѣдовательно для полученія взаимной фигуры достаточно черезъ неподвижную точку въ плоскости данной фигуры провести прямыя въ каждую ея точку, отложить на продолженіи этихъ прямыхъ, считая отъ неподвижной точки, отрѣзки обратно-пропорціональные длинѣ первыхъ прямыхъ и въ концѣ этихъ отрѣзковъ провести къ нимъ перпендикуляры. Эти перпендикуляры будутъ соотвѣтствовать точкамъ данной фигуры и будутъ огибать взаимную фигуру.

30. Ясно, что такой способъ преобразованія фигуръ прилагается и къ фигурамъ трехъ измѣреній. Мы выражаемъ его слѣдующимъ образомъ.

Пусть дана фигура въ пространствѣ; черезъ произвольно взятую неподвижную точку проводимъ во всѣ точки этой фигуры прямыя линіи и на нихъ (или на ихъ продолженіи по другую сторону отъ неподвижной точки) откладываемъ отрѣзки обратно-пропорціональные длинѣ этихъ линій; черезъ концы отрѣзковъ проводимъ плоскости перпендикулярныя къ направленію отрѣзковъ; эти плоскости будутъ огибать другую фигуру, которая будетъ взаимная данной въ томъ смыслѣ, какъ это понимается въ ученіи о двойственности. Т.-е. плоскостямъ данной фигуры будутъ соотвѣтствовать точки новой фигуры, и если плоскости проходятъ чрезъ одну точку, то соотвѣтственныя имъ точки будутъ лежать въ одной плоскости [25]).

Когда обратно-пропорціональныя величины откладываются на самыхъ прямыхъ, проводимыхъ изъ неподвижной точки къ точкамъ данной фигуры, то перпендикулярныя плоскости въ концахъ отрѣзковъ будутъ *полярныя* плоскости точекъ данной фигуры относительно нѣкоторой сферы, имѣющей центръ въ неподвижной точкѣ.

Нашъ способъ преобразованія обнимаетъ собою такимъ образомъ теорію *взаимныхъ поляръ* относительно сферы; онъ даже общѣе этой теоріи, потому что въ ней полярныя плоскости проходятъ всегда между соотвѣтственными имъ точкамъ данной фигуры и центромъ сферы, тогда какъ въ нашемъ способѣ преобразованія плоскости могутъ проходить и по другую сторону неподвижной точки, представляющей собою центръ [26]).

---

[25]) Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Оно изложено въ Примѣчаніи XXIX.

[26]) Наше замѣчаніе о степени общности теоріи взаимныхъ поляръ относится только къ геометрическому, а не аналитическому смыслу этой теоріи; въ аналитическомъ же смыслѣ радіусъ сферы, относительно которой берутся поляры, можетъ быть мнимый и тогда полярныя плоскости точекъ данной фигуры будутъ проходить по другую сторону, относительно точки представляющей центръ.

Намъ казалась достойною вниманія эта указанная нами тѣсная связь между теоріею взаимныхъ поляръ, появившеюся весьма недавно, и двойственностію сферическихъ фигуръ, которая извѣстна и употребительна уже около двухъ столѣтій.

31. Перейдемъ къ другимъ способамъ преобразованія.

Изъ нихъ два основываются, подобно предыдущему, на извѣстныхъ уже теоріяхъ. Первый содержится въ той *поризмѣ* Евклида, которую мы изложили, говоря о *Математическомъ Собраніи* Паппа (1-я эпоха, n° 31, въ выноскѣ): въ этой поризмѣ для всякой точки плоской фигуры строится соотвѣтственная прямая и легко видѣть также, что, если точки первой фигуры находятся на одной прямой, то соотвѣтственныя имъ прямыя второй фигуры, будутъ проходить черезъ одну точку.

Второй способъ вытекаетъ изъ теоріи *взаимныхъ* кривыхъ и поверхностей; аналитическое изложеніе этой теоріи дано Монжемъ (См. Примѣчаніе XXX).

32. Можно представить себѣ еще другіе способы преобразованія.

Представимъ себѣ, напримѣръ, въ пространствѣ трегранный уголъ и треугольникъ, помѣщенный въ плоскости, проведенной чрезъ вершину этого трегранного угла; черезъ каждую точку данной фигуры въ пространствѣ проводимъ три плоскости черезъ стороны треугольника; эти плоскости пересѣкутся съ соотвѣтственными ребрами трегранного угла въ трехъ точкахъ, опредѣляющихъ плоскость; построенныя такимъ образомъ плоскости будутъ огибать новую фигуру, которая будетъ находиться съ данною въ соотношеніи *двойственности*.

Сообщимъ данной въ пространствѣ фигурѣ какое-нибудь безконечно-малое перемѣщеніе и проведемъ во всѣхъ точкахъ нормальныя плоскости къ траэкторіямъ; эти плоскости будутъ огибать вторую фигуру, находящуюся съ первой въ соотношеніи двойственности, такомъ же какъ и предыдущій случай.

Положимъ, что на данную въ пространствѣ фигуру дѣйствуютъ различныя силы; черезъ каждую точку проводимъ главную плоскость силъ по отношенію къ этой точкѣ; такія плоскости будутъ огибать новую фигуру, взаимную относительно первой въ такомъ же смыслѣ какъ въ предыдущихъ случаяхъ.

33. Первый изъ этихъ способовъ преобразованія, въ которомъ употребляется трегранный уголъ, имѣетъ себѣ соотвѣтственный способъ на плоскости, именно вышеприведенную *поризму* Евклида. Два остальные способа не имѣютъ соотвѣтствующихъ на плоскости, но тѣмъ не менѣе могутъ служить для преобразованія плоскихъ фигуръ. Дѣйствительно, пусть дана фигура на плоскости; сообщимъ плоскости этой безконечно малое перемѣщеніе въ пространствѣ; нормальныя плоскости къ траэкторіямъ различныхъ точекъ фигуры будутъ огибать коническую поверхность (вершина которой находится въ плоскости фигуры) [27] и произвольная сѣкущая плоскость пересѣчется съ этою коническою поверхностью по фигурѣ, взаимной относительно данной.

Такимъ же образомъ можно для преобразованія плоскихъ фигуръ пользоваться всякимъ преобразованіемъ въ пространствѣ, не имѣющимъ себѣ соотвѣтствующаго плоскости.

34. **Самый общій принципъ преобразованія.** Мы могли бы указать еще нѣсколько другихъ частныхъ пріемовъ преобразованія, которые, подобно предыдущимъ, могутъ на плоскости или въ пространствѣ служить для того же назначенія, какъ и теорія взаимныхъ поляръ.

Но всѣ эти способы, также какъ и способы видоизмѣненія (*déformation*), о которомъ мы говорили выше, могутъ быть замѣнены единственнымъ принципомъ, болѣе общимъ и обширнымъ, чѣмъ каждый изъ нихъ. Этотъ принципъ, содержащій въ себѣ все ученіе о преобразованіи (*transfor-*

---

[27]) Доказательство этой теоремы мы дадимъ въ сочиненіи о геометрическихъ свойствахъ движеніи свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ.

mation) фигуръ, вытекаетъ изъ одной элементарной теоремы, въ которой по нашему мнѣнію первоначально заключается свойство *двойственности* присущее пространственнымъ формамъ,—свойство, о которомъ ученые геометры хотя уже писали и глубоко философски взглянули на этотъ отдѣлъ геометріи, но не восходили еще до основнаго принципа, независимаго отъ всякой частной теоріи.

35. **Частный характеръ теоріи взаимныхъ поляръ.** Нѣкоторыми соображеніями объ этомъ принципѣ преобразованія и о теоріи взаимныхъ поляръ мы пояснимъ теперь, въ какомъ смыслѣ упоминаемый принципъ имѣетъ болѣе общности, нежели эта теорія.

Фигуры, разсматриваемыя въ преобразованіи этого рода, обладаютъ свойствомъ взаимности, заключающемся въ томъ, что *каждой точкѣ данной фигуры соотвѣтствуетъ плоскость въ преобразованной и, взаимно, каждой точкѣ преобразованной фигуры соотвѣтствуетъ плоскость данной.* Это вытекаетъ изъ единственнаго требованія при построеніи второй фигуры, именно: *чтобы плоскости этой фигуры, соотвѣтствующія точкамъ данной, лежащимъ въ одной плоскости, необходимо проходили черезъ одну точку.* Въ этомъ и состоитъ взаимное соотвѣтствіе между точкою второй фигуры и плоскостію первой.

Въ этомъ условіи заключается все ученіе о взаимномъ преобразованіи, потому что этимъ оно отличается отъ безчисленнаго множества другихъ способовъ преобразованія, въ которыхъ плоскостямъ соотвѣтствуютъ точки, или же точкамъ—плоскости, но въ которыхъ оба эти обстоятельства не имѣютъ мѣста въ одно и тоже время; условіе это выполняется въ теоріи взаимныхъ поляръ, такъ какъ здѣсь полярныя плоскости точекъ одной и той же плоскости проходятъ черезъ одну точку (или, другими словами, если вершины конусовъ описанныхъ около поверхности втораго порядка лежатъ въ одной плоскости, то плоскости кривыхъ прикосновенія проходятъ черезъ одну точку). Вотъ почему теорія поляръ является средствомъ для взаимнаго преобра-

зованія фигуръ и обнаруживаетъ свойство *двойственности* пространства.

Но въ этой теоріи есть частная особенность: въ ней, точкѣ, черезъ которую проходятъ плоскости первой фигуры, соотвѣтствуетъ на второй именно та плоскость, въ которой лежатъ точки, соотвѣтственныя этимъ плоскостямъ, т.-е. полярная плоскость. Такимъ образомъ здѣсь первая фигура можетъ быть построена изъ второй точно также, какъ вторая строится изъ первой. Здѣсь мы встрѣчаемъ слѣдовательно совершенную *взаимность*, или лучше сказать полное *тождество* въ построеніи обѣихъ фигуръ.

Такъ какъ до сихъ поръ теорія взаимныхъ поляръ была единственнымъ средствомъ для взаимнаго преобразованія фигуръ, то можно было думать, что вышеупомянутое согласіе или полная взаимность формъ есть слѣдствіе тождества въ построеніи ихъ по этому способу. Но это была бы большая ошибка. Тождество построенія есть случайное обстоятельство, свойственное теоріи взаимныхъ поляръ и встрѣчающееся также въ нѣкоторыхъ другихъ пріемахъ преобразованія; но не оно пораждаетъ *двойственность* пространства; этого тождества нѣтъ во многихъ способахъ взаимнаго преобразованія, между прочимъ и въ томъ, который, какъ мы покажемъ, заключаетъ въ себѣ всѣ другіе какъ слѣдствія или какъ частные случаи. Поэтому мы совсѣмъ не пользуемся этимъ тождествомъ построенія и устраняемъ его въ нашемъ изложеніи ученія о преобразованіи, какъ обстоятельство частное и случайное.

36. **Частный характеръ нѣкоторыхъ другихъ способовъ преобразованія.** Въ способѣ преобразованія посредствомъ безконечно-малыхъ движеній встрѣчаемъ опять тождество построенія, также какъ и въ теоріи поляръ: здѣсь плоскости нормальныя къ траэкторіямъ точекъ первой фигуры огибаютъ такую вторую фигуру, что если ей сообщить такое же движеніе, какъ первой, то плоскости нормальныя къ ея проэкторіямъ огибали бы первую фигуру.

Подобная же взаимность имѣетъ мѣсто въ фигурахъ, для преобразованія которыхъ разсматривается система силъ.

Но не то будетъ въ преобразованіи при помощи трегранного угла. Если точка описываетъ какую-нибудь фигуру, то соотвѣтственная ей плоскость, построенная, какъ было выше показано, при помощи триграннаго угла, огибаетъ вторую, соотвѣтственную или производную, фигуру. Но, если точка будетъ описывать эту вторую фигуру,—подвижная плоскость не будетъ уже огибать первую фигуру, какъ въ теоріи поляръ или въ преобразованіи посредствомъ безконечно-малаго перемѣщенія; она будетъ огибать третью фигуру, совершенно отличную отъ первой. Только въ частномъ случаѣ, когда вершины треугольника лежатъ въ плоскостяхъ граней трегранного угла, будетъ имѣть мѣсто тождество построенія, т.-е. третья фигура не будетъ отличаться отъ первой.

Въ преобразованіи плоскихъ фигуръ на основаніи *поризмы* Евклида тождества никогда быть не можетъ. Когда точка описываетъ данную фигуру, соотвѣтствующая прямая огибаетъ вторую, производную, фигуру; но, если точка будетъ описывать вторую фигуру, то соотвѣтствующая прямая будетъ огибать новую фигуру, всегда отличающуюся отъ первой.

Впрочемъ всегда можно по данному способу преобразованія первой фигуры во вторую найти такой другой способъ, посредствомъ котораго вторая фигура воспроизводитъ превую. Въ частныхъ случаяхъ, представляемыхъ теоріею поляръ, способомъ безконечно-малаго перемѣщенія данной фигуры и пр. эти два обратные способа преобразованія, вообще различные между собою, становятся совершенно одинаковыми. Нами даны общія соотношенія между такими двумя обратными способами, такъ что, зная одинъ, можно опредѣлить другой.

37. **Теорія поляръ не есть самый общій способъ преобразованія.** Мы высказали эти, можетъ быть слишкомъ подробныя, соображенія съ цѣлію утвердить въ умѣ читателя мысль, что *двойственность* пространства ни коимъ образомъ не проистекаетъ изъ особенностей по-

строенія, которыя, какъ могло казаться судя по теоріи поляръ, составляютъ повидимому отличительный характеръ преобразованій обнаруживающихъ эту двойственность.

Изъ нашихъ соображеній слѣдуетъ также, что теорія взаимныхъ поляръ не есть наиболѣе общій способъ преобразованія. Впрочемъ, если бы мы имѣли въ виду обнаружить только эту истину, то намъ было бы достаточно сказать, что въ общемъ способѣ преобразованія, обнимающемъ всѣ другіе, можно для построенія фигуры взаимной съ данною фигурой выбрать произвольно въ пространствѣ пять плоскостей соотвѣтствующихъ пяти даннымъ точкамъ первой фигуры; тогда какъ въ способѣ взаимныхъ поляръ двѣ взаимныя фигуры связаны между собою болѣе тѣсными условіями. Дѣйствительно, разсматривая два тетраэдра, въ которыхъ вершинамъ одного соотвѣтствуютъ грани другаго, увидимъ, что четыре прямыя, соединяющія вершины перваго тетраэдра съ соотвѣтственными вершинами втораго,—т.-е. съ вершинами противоположными соотвѣтственнымъ гранямъ,—всегда представляютъ четыре образующія гиперболоида съ одною полостью, принадлежащія къ одному роду образованія поверхности [28]).

Другіе способы преобразованія представляютъ точно также нѣкоторыя частныя соотношенія между взаимно соотвѣтственными фигурами, но не такія, какъ только что указанныя нами въ полярно-взаимныхъ фигурахъ.

Такъ, въ преобразованіи посредствомъ безконечно-малаго перемѣщенія обнаруживается, что двѣ какія угодно прямыя

---

[28]) Это потому, что *прямыя, соединяющія четыре вершины тетраэдра съ полюсами противоположныхъ граней, относительно какой угодно поверхности втораго порядка, суть образующія одного рода образованія гиперболоида съ одною полостію.*

Теорема эта, доказанная нами въ *Annales de Mathématiques* t. XIX, p. 76, доставляетъ множество слѣдствій. Изъ нея, напримѣръ, выходитъ, что *четыре перпендикуляра, опущенные изъ вершинъ тетраэдра на противоположныя грани, суть четыре образующія одного рода образованія гиперболоида.*

съ двумя ихъ производными должны быть образующими одного рода на поверхности гиперболоида.

38. **Преобразованіе метрическихъ и угловыхъ соотношеній**. До сихъ поръ мы говорили только о начертательныхъ соотношеніяхъ взаимно соотвѣтственныхъ фигуръ и о соотношеніяхъ, зависящихъ только отъ ихъ положенія; но необходимо разсмотрѣть также зависимость между ихъ метрическими и угловыми размѣрами. Этого рода соотношенія входятъ въ изложеніе теоремъ, зависящихъ отъ размѣровъ фигуръ.

Общія выраженія зависимости между размѣрами первоначальной и взаимно соотвѣтственной фигуръ, вытекаютъ изъ очень простаго принципа, который не употреблялся въ теоріи поляръ, вслѣдствіе чего эта теорія, получившая весьма общее приложеніе къ преобразованію начертательныхъ свойствъ, имѣла очень ограниченное примѣненіе къ соотношеніямъ количественнымъ; не были въ употребленіи даже всѣ соотношенія, которыя существуютъ при преобразованіи помощію поляръ, и за недостаткомъ того общаго принципа, о которомъ мы говоримъ, для преобразованія количественныхъ соотношеній пользовались только двумя частными случаями способа поляръ. Именно, принимали за вспомогательную поверхность или сферу, какъ Понселе въ *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* [29]) и потомъ Бобилье [30]), или же—параболоидъ, какъ это предложено нами въ двухъ мемуарахъ *Sur la transformation parabolique des relations métriques* [31])

Изъ этихъ двухъ способовъ преобразованія вытекаютъ неодинаковыя количественныя соотношенія между двумя взаимными фигурами. Въ первомъ случаѣ соотношеніе заключается въ томъ, что уголъ между двумя плоскостями въ одной фи-

---

[29]) Crelle's *Journal* t. IV. Мемуаръ этотъ былъ представленъ Парижской Академіи Наукъ 12-го апрѣля 1824 г.

[30]) *Annales de Mathématiques*, t. XVIII, 1827—1828 г.

[31]) *Correspondence mathématique* de Quetelet, t. V et VI.

гурѣ равенъ углу между радіусами вспомогательной сферы, проведенными въ тѣ точки второй фигуры, которыя соотвѣтствуютъ этимъ плоскостямъ [32]); во второмъ же случаѣ соотношеніе таково, что отрѣзокъ оси вспомогательнаго параболоида между двумя плоскостями одной фигуры равенъ ортогональной проэкціи на эту ось прямой, соединяющей во взаимной фигурѣ двѣ точки, соотвѣтственныя этимъ плоскостямъ.

Оба эти способа преобразованія съ одинаковымъ удобствомъ были приложены ко всѣмъ соотношеніямъ, представляющимся въ теоріи трансверсалей. Кромѣ того, первый прилагался къ нѣкоторымъ особымъ угловымъ соотношеніямъ, напримѣръ къ теоремамъ Ньютона и Маклорена объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій; второй же—къ нѣкоторымъ соотношеніямъ между прямолинейными разстояніями, преимущественно къ теоріямъ Ньютона о геометрическихъ кривыхъ, причемъ мы пришли къ совершенно новому роду свойствъ этихъ кривыхъ [33]).

39. Кромѣ указаннаго различія въ общихъ количественныхъ соотношеніяхъ эти два способа взаимнаго преобразованія отличаются также и въ соотношеніяхъ начертательныхъ, вслѣдствіе чего эти способы являются съ характеромъ до извѣстной степени частнымъ и ограниченнымъ.

Напримѣръ, когда за вспомогательную поверхность берется сфера и если въ составъ первой фигуры входитъ другая сфера, то ей во взаимной фигурѣ будетъ соотвѣтствовать поверхность вращенія втораго порядка, такъ что общихъ свойствъ какой угодно поверхности втораго порядка мы этимъ путемъ не получаемъ.

---

[32]) Мемуаръ Понселе о взаимныхъ полярахъ.

[33]) Приведемъ для примѣра одно изъ такихъ свойствъ, выражаемое слѣдующею теоремой: Если проведемъ къ геометрической кривой всѣ касательныя параллельныя данному направленію, то центръ среднихъ разстояній ихъ точекъ будетъ находиться въ точкѣ, положеніе которой остается одно и тоже при всякомъ направленіи параллельныхъ касательныхъ. Точку эту мы назвали *центромъ* кривой. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ и геометрическія поверхности.

Точно также, при выборѣ за вспомогательную поверхность параболоида, если преобразуется фигура, въ составъ которой входитъ эллипсоидъ, то во взаимной фигурѣ ему будетъ соотвѣтствовать всегда гиперболоидъ, но никогда не эллипсоидъ. Но важнѣйшее неудобство заключается не въ этомъ недостаткѣ общности, а въ томъ, что безконечно удаленнымъ прямымъ первой фигуры будутъ здѣсь соотвѣтствовать прямыя параллельныя оси пароболоида и слѣдовательно проходящія черезъ одну и туже безконечно-удаленную точку. Такимъ образомъ мы получаемъ свойство различныхъ системъ параллельныхъ линій, тогда какъ при употребленіи другой вспомогательной поверхности имѣли бы вмѣсто этого—свойство прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку.

Правда, можно затѣмъ другимъ путемъ (именно помощію способовъ второй группы нашего дѣленія) распространить свойства сферы на всѣ поверхности втораго порядка и свойства системы параллельныхъ прямыхъ на систему линій, проходящихъ черезъ одну точку; но это, какъ въ графическомъ, такъ и въ теоретическомъ смыслѣ, будетъ уже не одна, а двѣ различныя операціи.

40. Общій принципъ преобразованія, изложенный въ нашемъ мемуарѣ, за исключеніемъ нѣкоторыхъ случаевъ, гдѣ начертательныя и количественныя соотношенія имѣютъ слишкомъ частный характеръ для его примѣненія, представляетъ почти всегда, и особенно при изслѣдованіи метрическихъ соотношеній, не только преимущество большой общности, но и выгоду болѣе удобнаго и быстраго приложенія, чѣмъ всѣ частные методы.

Принципъ взаимнаго преобразованія (*transformation*) и принципъ видоизмѣненія (*déformation*), замѣняющій собою способы нашей второй группы,—разсматриваемые съ такой точки зрѣнія и прилагаемые въ своемъ наиболѣе общемъ и отвлеченномъ значеніи, оправдываютъ наставленіе знаменитаго творца *Небесной Механики:* „Предпочитайте общіе способы, старайтесь излагать ихъ по возможности просто,—и вы уви-

дите, что они всегда будутъ въ то же время самые простые"[34]). Лакруа, съ авторитетомъ, который онъ имѣетъ въ наукѣ по своей громадной опытности и глубокимъ познаніямъ, прибавилъ къ этому: „общіе способы вмѣстѣ съ тѣмъ раскрываютъ лучше всего истинно - философскій смыслъ науки"[35]).

41. **Особыя теоріи въ геометріи.** Въ послѣдніе тридцать лѣтъ геометрія обогатилась столь многими и разнообразными предложеніями и даже теоріями, что въ нашемъ обзорѣ ея успѣховъ за это время мы принуждены были остановиться только на важнѣйшихъ методахъ, указывая ихъ происхожденіе, характеръ и употребленіе въ раціональной геометріи.

Болѣе подробный разборъ множества сочиненій, въ которыхъ для настоящей минуты заключается будущность геометріи и зачатки ея дальнѣйшаго развитія, былъ бы безспорно очень полезенъ, но на это потребовался бы цѣлый томъ и чрезмѣрно расширились бы границы, въ которыхъ мы должны держаться.

Однако мы не можемъ не остановиться на двухъ, изъ множества другихъ отдѣловъ, которые по различнымъ причинамъ представляютъ, какъ намъ кажется, особенную важность для развитія отвлеченной геометріи и ея приложеній къ вопросамъ о явленіяхъ природы. Мы говоримъ о теоріи поверхностей втораго порядка и о геометріи сферы, т.-е. ученіи о сферическихъ фигурахъ.

Послѣднее ученіе существуетъ уже такъ давно, поверхности же втораго предмета представляютъ предметъ настолько избитый, особенно въ послѣдніе годы, что можетъ, вѣроятно, возникнуть сомнѣніе, возможно-ли еще что-нибудь сдѣлать въ этихъ двухъ отдѣлахъ геометріи и имѣютъ ли они дѣйствительно ту важность, которую мы имъ приписываемъ. Поспѣшимъ оправдать наше мнѣніе, что бы преду-

---

[34]) *Séances des écoles normales*, in—8⁰, 1800, t. IV, p. 49.

[35]) *Essais sur l'enseignement*, 3-e éd. in—8⁰, 1828.

предить чувство недовѣрчивости, которое мы боимся встрѣтить во многихъ геометрахъ, прочитывающихъ наше сочиненіе.

42. **Геометрія сферы.** Геометрія сферы восходитъ до глубокой древности; она получила свое начало въ тотъ день, когда астрономъ-философъ сдѣлалъ попытку открыть связь между явленіями планетнаго міра. Мы видѣли, что Гиппархъ, Ѳеодосій, Менелай, Птоломей обладали уже значительными познаніями въ сферической тригонометріи. Но вся эта наука приводилась къ вычисленію треугольниковъ; хотя впослѣдствіи она развилась и въ рукахъ нашихъ знаменитѣйшихъ геометровъ достигла высокой степени совершенства, но всегда оставалась въ однихъ и тѣхъ же рамкахъ, потому что сохраняла всегда одно и то же назначеніе, именно — вычисленіе треугольниковъ для употребленія въ астрономіи, мореплаваніи и въ тѣхъ громадныхъ геодезическихъ работахъ, которыя открыли намъ истинную форму земнаго сфероида. Но эта наука, соотвѣтствующая почти вполнѣ ученію о прямой линіи и о треугольникахъ въ геометріи на плоскости, не составляетъ еще всей геометріи сферы. На этой кривой поверхности очевидно можно, подобно фигурамъ на плоскости, разсматривать множество различныхъ фигуръ, начиная съ круга какъ фигуры простѣйшей.

Но такое естественное распространеніе было введено въ геометрію сферы не болѣе сорока лѣтъ тому назадъ. Это сдѣлано было геометрами сѣверной Европы. Если оставить въ сторонѣ теорію сферическихъ эпициклоидъ и нѣкоторыя особыя изслѣдованія, напр. изслѣдованія Гвидо Гранди о кривыхъ, названныхъ *клеліями*, то мы не замѣтимъ, чтобы кто нибудь пытался разрѣшить на сферѣ задачи, подобныя задачамъ плоской геометріи, раньше Лекселя (Lexell), который въ Актахъ Петербургской Академіи (т. V и VI) изслѣдовалъ свойство круговъ проведенныхъ на сферѣ, подобныя свойствамъ круговъ на плоскости. Этому геометру обязаны мы изящною теоремою о кривой, представляющей мѣсто

вершинъ сферическихъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и одинаковую площадь.

Вскорѣ послѣ этого Фуссъ, соотечественникъ Лекселя, въ двухъ мемуарахъ (Nova Acta, t. III et IV) разрѣшилъ нѣсколько вопросовъ сферической геометріи, занимаясь преимущественно свойствами *сферическаго эллипса*. Это—кривая представляющая мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и постоянную сумму двухъ другихъ сторонъ. Фуссъ нашелъ, что эта кривая есть пересѣченіе сферы съ конусомъ втораго порядка, имѣющимъ вершину въ центрѣ сферѣ; другими словами,—это есть линія кривизны конусовъ втораго порядка [36]).

Эти первыя работы Лекселя и Фусса были продолжаемы въ Актахъ Петербургской Академіи Шубертомъ [37]), о которомъ мы уже говорили по тому поводу, что онъ всю сферическую тригонометрію основалъ на одной теоремѣ Птоломея. Этотъ геометръ рѣшилъ многіе вопросы о геометрическихъ мѣстахъ вершины треугольника, имѣющаго незмѣнное основаніе, какъ въ задачахъ Лекселя и Фусса, но двѣ другія стороны котораго подчиняются различнымъ другимъ условіямъ.

Этотъ новый родъ изысканій, обѣщавшій обильную жатву новыхъ и интересныхъ истинъ, остался однако такъ мало замѣченнымъ, что изъ изящной теоремы Лекселя, хотя она и помѣщалась въ многочисленныхъ изданіяхъ геометріи Лежандра, никто не вывелъ заключенія о существованіи подобной же и не менѣе интересной теоремы, получаемой изъ нея согласно теоріи *дополнительныхъ* фигуръ. Только въ недавнее время Sorlin получилъ прямо эту теорему въ мемуарѣ о

---

[36]) Эта кривая описывается на сферѣ, подобно эллипсу на плоскости, посредствомъ нити, концы которой укрѣплены въ двухъ фокусахъ и которая натягивается подвижнымъ остріемъ. Фуссъ получилъ этотъ замѣчательный выводъ изъ своихъ формулъ. Если длина нити равна полуокружности сферы, то описываемая кривая будетъ большой кругъ при какомъ угодно разстояніи между фокусами.

[37]) *Nova acta*, t. XII, 1794, p. 196.

сферической тригонометріи, въ которомъ двойственность сферическихъ фигуръ, т.-е. двоякаго рода свойства ихъ, изложены въ полномъ соотвѣтствіи между собою [38]).

Весьма также недавно Магнусомъ, изъ Берлина, былъ снова выведенъ на сцену *сферическій эллипсъ* Фусса; Магнусъ путемъ анализа открылъ и доказалъ сперва соотвѣтственное свойство конуса и отсюда уже, какъ слѣдствіе, вывелъ свойство этого эллипса. Онъ открылъ въ немъ еще другое прекрасное свойство, аналогическое съ однимъ изъ важнѣйшихъ свойствъ плоскаго эллипса, именно: дуги двухъ большихъ круговъ, проведенныхъ изъ фокусовъ въ точку кривой, образуютъ равные углы съ дугою круга касательнаго въ этой точкѣ [39]).

43. Нѣсколькими годами ранѣе другіе геометры разрѣшили различные вопросы сферической геометріи и указали аналогію ихъ съ вопросами геометріи на плоскости. Люилье, изъ Женевы, нашелъ для сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ теоремы сходныя съ важнѣйшими предложеніями о прямоугольныхъ треугольникахъ на плоскости, какова напр. теорема Пиѳагора [40]); онъ опредѣлилъ также центръ среднихъ разстояній для сферическаго треугольника [41]). Жергоннъ, въ *Annales de Mathématiques*, предложилъ рѣшеніе различныхъ вопросовъ геометріи на сферѣ, имѣющихъ себѣ соотвѣтственные на плоскости; приведемъ напримѣръ слѣдующее прекрасное свойство сферическаго четыреугольника, принадлежащее также и плоскому четыреугольнику: *если сумма двухъ противоположныхъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ, то около четыреугольника можно описать кругъ* [42]). Потомъ Гено (Guéneau d'Aumont), профессоръ въ

---

[38]) *Annales de Mathématiques*, t. XV, 1824—1825.

[39]) *Ibid* t. XVI.

[40]) *Ibid* t. I, 1810—1811.

[41]) *Ibid* t. II, 1811—1812.

[42]) Изложено въ т. V, стр. 384 и доказана Дюрраномъ въ т. VI, стр. 49.

Дижонѣ, открылъ въ сферическихъ четыреугольникахъ, вписанныхъ въ кругъ, характеристическое свойство, соотвѣтствующее въ *дополнительныхъ* фигурахъ теоремѣ Жергона: *сумма двухъ противоположныхъ угловъ такого четыреугольника равна суммѣ двухъ остальныхъ* [43]); это свойство есть безспорно одно изъ важнѣйшихъ въ элементахъ сферической геометріи, такъ какъ оно выражаетъ собою простое и богатое слѣдствіями соотношеніе между четырьмя точками, лежащими на одномъ маломъ кругѣ.—Кетле разсматривалъ на сферѣ многоугольники, составленные изъ дугъ большихъ или малыхъ круговъ, и далъ простую и изящную формулу для вычисленія ихъ поверхности [44]). Этотъ вопросъ уже не разъ занималъ геометровъ; прежде всего—Курсье [45]), о которомъ мы уже говорили какъ о геометрѣ, построившемъ нѣкоторыя линіи двойной кривизны, затѣмъ—Д'Аламберта [46]) и Боссю [47]), которые прилагали къ рѣшенію аналитическіе пріемы и для которыхъ этотъ вопросъ служилъ доказательствомъ, что чистая геометрія представляетъ нерѣдко болѣе легкій и быстрый путь, нежели самыя утонченныя и остроумныя вычисленія.

44. До сихъ поръ мы встрѣтили только нѣсколько разрозненныхъ предложеній, весьма красивыхъ и способныхъ привлечь интересъ къ сферической геометріи, но еще не представляющихъ систематическаго и послѣдовательнаго изученія этого отдѣла науки о пространствѣ. Только въ послѣднее время стали пытаться основать геометрію сферы въ такомъ же видѣ, какъ существующая геометрія на плоскости. Первый пошелъ этимъ путемъ, сколько намъ извѣстно, Штейнеръ въ сочиненіи *о преобразованіи и раздѣленіи сферическихъ фигуръ* на основаніи графическихъ по-

---

[43]) *Annales de Mathématiques*, t. XII, 1821—1822.

[44]) *Nouveaux Mémoires de l'Academie de Bruxelles*, t. II, 1822.

[45]) *Supplementum sphaerometriae, sive triangularium et aliarum in sphaera figurarum quoad areas mensuratio*. 1676.

[46]) *Mémoires de la Société royale de Turin*, t. IV, p. 127, 1766—1769.

[47]) *Traité de calcul différentiel et integral*, t. II, p. 522.

строеній [48]); сочиненіе это основано на вышеупомянутой изящной теоремѣ Гено. Штейнеръ доказываетъ здѣсь предложеніе соотвѣтствующе, по способу дополнительныхъ фигуръ, теоремѣ Фусса о сферическомъ эллипсѣ [49]) и находитъ двѣ дуги большихъ круговъ, играющія роль асимптоты гиперболы на плоскости. (Это тѣ самые двѣ дуги, которыя мы въ *Mémoire sur les coniques sphériques* назвали *циклическими дугами* (*arcs cycliques*) и къ которымъ были приведены изслѣдованіемъ круговыхъ сѣченій конуса втораго порядка).

Не можемъ входить въ дальнѣйшія подробности по поводу сочиненія Штейнера, которое написано по-нѣмецки и извѣстно намъ только по разбору, находящемуся въ *Bulletin universel des sciences* t. VIII, p. 298. Также кратко укажемъ на Гудермана по поводу его спеціальныхъ и глубокихъ изслѣдованій объ аналогіи между сферическими и плоскими фигурами [50]).

45. Такимъ образомъ положено начало сферической геометріи въ правильной и догматической формѣ; имена геометровъ, взявшихъ на себя это дѣло, ручаются за быстрые успѣхи этого отдѣла науки о пространствѣ. Никто не ста-

---

[48]) *Crelle's Journal* t. II.

[49]) Предложеніе это таково: *огибающая основаній треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую поверхность и общій уголъ, есть сферическій эллипсъ.* Когда мы сами доказали эту теорему, помѣщенную сперва въ *Mémoire sur les surfaces du second degré de révolution*, потомъ въ спеціальномъ сочиненіи *sur les coniques sphériques*, то думали, что намъ первымъ удалось это, такъ какъ не знали тогда разбора мемуара Штейнера въ *Bulletin des sciences*. Иначе мы указали бы на сочиненіе этого глубокаго геометра съ такимъ же уваженіемъ, съ какимъ во многихъ случаяхъ указывали на сочиненіе Магнуса о томъ же предметѣ.

[50]) Въ отчетѣ о содержаніи VI тома журнала Крелля *Bulletin des sciences* (t. XV, p. 75, февраль 1831) выражается такъ: „Гудерманъ излагаетъ нѣсколько теоремъ, относящихся къ теоріи, называемой имъ *аналитическою сферикою,* начала которой онъ изложилъ въ сочиненіи недавно изданномъ въ Кельнѣ. Задача состоитъ въ томъ, что бы путемъ аналогіи переходить отъ свойствъ плоскихъ фигуръ къ свойствамъ фигуръ начерченныхъ на сферѣ и отнесенныхъ къ системѣ сферическихъ координатъ.“

нетъ оспаривать теоретической пользы подобныхъ изысканій. Чтобы это подтвердить, достаточно замѣтить, что плоская геометрія есть не болѣе какъ частный случай сферической, именно тотъ, когда радіусъ предполагается безконечнымъ; поэтому всѣ важнѣйшія истины первой необходимо находятся въ связи съ наиболѣе общими свойствами въ послѣдней; всегда полезно разсматривать геометрическія истины въ ихъ наибольшей общности, въ ихъ, если можно такъ выразиться, наибольшей близости къ высшимъ законамъ, изысканіе которыхъ есть постоянная цѣль всѣхъ усилій геометровъ. При такой общности эти истины представляютъ такія соотношенія и аналогіи, которыя не замѣчаются въ ихъ слѣдствіяхъ, но которыя обнаруживаютъ ихъ взаимную связь и даютъ возможность восходить къ еще болѣе общимъ принципамъ, слѣды которыхъ неясны и неразличимы въ предложеніяхъ частныхъ и ограниченныхъ. Геометрія сферы, независимо отъ свойственнаго ей самой характера и безспорнаго ея значенія, заслуживаетъ слѣдовательно со стороны геометровъ вниманія и изученія уже какъ способъ обобщенія свойствъ фигуръ на плоскости. Мы уже замѣтили выше [51]), что при настоящемъ состояніи геометріи *обобщеніе* есть самое вѣрное средство для дальнѣйшаго ея развитія и для новыхъ открытій. Трудами геометровъ должно руководить именно такое направленіе научнаго изслѣдованія [52]).

46. **Поверхности втораго порядка**. Чтобы заключить обзоръ развитія и успѣховъ новѣйшей геометріи, намъ остается разсмотрѣть еще одну изъ отдѣльныхъ теорій, наиболѣе важную и разработанную, именно теорію поверхностей втораго порядка.

---

[51]) Глава III, n⁰ 20.

[52]) „Истинно полезенъ такой очеркъ науки, который въ ежедневныхъ ея успѣхахъ ищетъ и видитъ только средства для достиженія общихъ законовъ, для включенія пріобрѣтенныхъ понятій въ общія понятія высшаго порядка". (Herschel, *Discours sur l'étude de la philosophie naturelle*).

Древніе знали изъ поверхностей втораго порядка кажется только конусъ, цилиндръ и поверхности вращенія, которыя они называли *сфероидами* и *коноидами*[53]): до Эйлера не усматривалось никакой другой аналогіи между формами въ пространствѣ и столь знаменитыми плоскими кривыми, названными *коническими сѣченіями*. Этотъ великій геометръ распространилъ на кривыя поверхности аналитическій пріемъ, служившій ему для изслѣдованія кривыхъ линій на плоскости[54]) и открылъ въ общемъ уравненіи второй степени съ тремя обыкновенными координатами пять различныхъ видовъ поверхностей[55]), между которыми сфероиды и коноиды древнихъ являются не болѣе какъ частными формами. Эйлеръ ограничился только этою классификаціею. Но этого было достаточно, чтобы открыть геометрамъ обширное поле изслѣдованій, представляемыхъ теоріею поверхностей втораго порядка.

Монжъ и его сотоварищъ Гашетъ поняли всю важность этой теоріи и, подвергнувъ поверхности втораго порядка новому, болѣе глубокому и подробному аналитическому изслѣдованію, открыли многія важнѣйшія свойства ихъ. Они показали двойное образованіе поверхностей втораго порядка помощію перемѣщающагося круга, которое было извѣстно со времени Дезарга[56]) для конусовъ втораго порядка и позднѣе было замѣчено только у эллипсоида Д'Аламбертомъ[57]); въ первый разъ было также обнаружено образованіе движе-

---

[53]) За исключеніемъ гиперболоида вращенія съ одною полостью, котораго древніе не разсматривали.

[54]) *Introductio in analysin infinitorum*, in—4°, 1748: Appendix, cap. V.

[55]) Эйлеръ разсматривалъ параболическій цилиндръ какъ шестой родъ поверхностей втораго порядка; впослѣдствіи эту поверхность, также какъ цилиндръ съ эллиптическимъ и гиперболическимъ основаніемъ, стали разсматривать какъ разновидности пяти главныхъ родовъ.

[56]) Мы упомянули, говоря о Дезаргѣ, что этотъ геометръ предложилъ вопросъ о сѣченіи конуса втораго порядка по кругу; вопросъ этотъ былъ рѣшенъ имъ и Декартомъ.

[57]) *Opuscules mathématiques*, t. VII, p. 163.

ніемъ прямой линіи гиперболоида съ одною полостью и гиперболическаго параболоида [58]). Въ примѣчаніи къ трак-

---

[58]) Честь этого открытія, одного изъ важнѣйшихъ въ теоріи поверхностей втораго порядка, умножившаго ея приложенія къ начертательной геометріи и къ искуствамъ, принадлежитъ первымъ лучшимъ ученикамъ (aux élèves chefs de brigade) политехнической школы (См. *Journal de l'école polytechnique*, t. I, p. 5).

Указываемое свойство гиперболоида долгое время доказывалось только путемъ анализа. Бывши ученикомъ политехнической школы, я нашелъ чисто геометрическое доказательство, которое перешло въ преподаваніе въ школѣ и помѣщалось во многихъ сочиненіяхъ (См. *Traité de Géométrie descriptive* de Vallée, p. 86 и Leroy, p. 267).

Доказательство это основывается на слѣдующей теоремѣ: *Если прямая перемѣщается, пересѣкая противоположныя стороны AB, CD косаго четыреугольника $ABCD$ въ такихъ точкахъ m, n, что*

$$\frac{mA}{mB}=a.\frac{nD}{nC},$$

гдѣ a постоянное, то она огибаетъ гиперболоидъ съ одною полостью. Это потому, что она будетъ опираться во всѣхъ своихъ положеніяхъ на всякую другую прямую, пересѣкающуюся съ двумя другими противоположными сторонами четыреугольника, въ двухъ точкахъ p, q, для которыхъ будетъ

$$\frac{qA}{qD}=a\frac{pB}{pC}$$

(См. *Correspondance polytechnique*, t. II, p. 446).

Доказательство этой теоремы очень просто и требуетъ только знанія Птоломеевой теоремы о треугольникѣ, пересѣченномъ трансверсалью (*Correspondance polytechnique*, t. III, p. 6). Впослѣдствіи теорія ангармоническаго отношенія представила намъ другое, еще болѣе простое и элементарное доказательство, основывающееся только на понятіи объ ангармоническомъ отношеніи (См. Примѣчаніе IX).

Эта теорема прилагается также къ образованію коническихъ сѣченій и выражаетъ прекрасное общее свойство этихъ кривыхъ (См. *Correspondance mathématique* de Quetelet, t. IV, p. 363).

Сказавъ, что двоякое образованіе гиперболоида съ одною полостью получило начало въ полетехнической школѣ, мы разумѣемъ только гиперболоидъ съ неравными осями и должны прибавить, что двоякое образованіе помощію прямой линіи гиперболоида вращенія съ одною полостью было уже извѣстно, хотя можетъ быть забыто; оно было открыто уже очень давно и рѣдко воспроизводилось. По нашему

тату о поверхностяхъ втораго порядка доказано въ первый разъ одно изъ самыхъ важныхъ ихъ свойствъ, именно то, что три поверхности съ центромъ, эллипсоидъ и два гиперболоида [59]), имѣютъ всегда систему трехъ взаимно-перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ [60]).

47. Впослѣдствіи ученики Монжа съ успѣхомъ разрабатывали теорію поверхностей втораго порядка и пошли весьма далеко въ изученіи ихъ свойствъ: сначала тѣхъ, которыя касаются каждой поверхности въ отдѣльности и въ соотношеніи ея съ простѣйшими геометрическими формами, т.-е.

мнѣнію оно было сдѣлано Вреномъ, который помѣстилъ объ этомъ въ *Philosophical Transactions* (1669, p. 961) весьма короткую замѣтку подъ заглавіемъ: *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici, elaborandis lentibus hyperbolicis accomodati*. Вренъ указываетъ на примѣненіе, которое можно сдѣлать изъ такого образованія посредствомъ прямой, къ выдѣлкѣ гиперболическихъ стеколъ.

Въ 1698 году Паранъ также нашелъ это свойство гиперболоида вращенія и доказалъ его аналитически и посредствомъ простыхъ геометрическихъ соображені въ двухъ различныхъ мемуарахъ (*Essais et recherches de mathématique et de physique*, t. II, p. 645 et t. III, p. 570). Этого свойства не имѣютъ другія поверхности, происходящія отъ обращенія коническаго сѣченія около главной оси, и Паранъ называетъ гиперболоидъ съ одною полостію самою полною изъ этихъ поверхностей, потому что на немъ имѣютъ мѣсто сѣченія шести различныхъ видовъ, именно: двѣ параллельныя прямыя, двѣ линіи пересѣкающіяся, кругъ, парабола, эллипсъ и гипербола. Паранъ называетъ эту поверхность, также какъ Вренъ, *гиперболическимъ цилиндроидомъ* и также пользуется образованіемъ посредствомъ прямой линіи для выдѣлки на токарномъ станѣ гиперболическихъ стеколъ, пригодныхъ въ діоптрикѣ.

Sauveur доказалъ также это свойство гиперболоида вращенія и еще нѣсколько другихъ предложеній о объемахъ и поверхностяхъ коноидовъ; содержаніе предложеній было ему указано Параномъ (*Essais et recherches de mathématiques et de physique*, t. III, p. 526)

[59]) Конусъ втораго порядка мы разсматриваемъ какъ частный случай гиперболоидовъ, подобно тому какъ въ геометріи на плоскости двѣ пересѣкающіяся прямыя разсматриваются какъ частная или *предѣльная* форма гиперболы. Поэтому мы и не помѣстили конуса въ числѣ главныхъ поверхностей съ центромъ.

[60]) См. 11-ю тетрадь *Journal de l'école polytechnique*, p. 107.

съ точкою, прямою и плоскостью, а потомъ—тѣхъ, которыя вытекаютъ изъ сравненія двухъ или нѣсколькихъ поверхностей между собою. И въ этихъ болѣе сложныхъ изысканіяхъ первые шаги сдѣланы были Монжемъ. Мы не можемъ входить въ подробности обо всѣхъ этихъ открытіяхъ, какъ они намъ ни кажутся привлекательны. Они такъ тѣсно связаны со всѣми геометрическими изслѣдованіями послѣднихъ тридцати лѣтъ, что намъ пришлось бы входить въ излишнія подробности, которыхъ мы принуждены избѣгать. Чтобы пополнить недосказанное нами, укажемъ на то мѣсто, гдѣ Дюпенъ, разбирая труды Монжа по аналитической геометріи, припоминаетъ заслуги его учениковъ и на введеніе къ *Traité des propriétés projectives*, гдѣ Понселе весьма подробно и съ похвальною заботливостію указалъ первенство, которое другіе геометры могутъ предъявить по поводу открытія нѣкоторыхъ геометрическихъ истинъ, вытекающихъ естественнымъ образомъ изъ его новаго ученія.

48. **Развитіе, къ которому способна теорія поверхностей втораго порядка.** Не смотря на важность успѣховъ, достигнутыхъ въ теоріи поверхностей втораго порядка, должно замѣтить, что эти успѣхи составляютъ весьма малую долю тѣхъ, къ которымъ повидимому способна эта теорія. Мы легко поймемъ это, бросивъ взглядъ на важнѣйшія свойства коническихъ сѣченій, которымъ соотвѣтственныя еще далеко не всѣ найдены въ поверхностяхъ втораго порядка. Такія аналогичныя свойства необходимо существуютъ, хотя бы только потому, что они должны давать, какъ слѣдствія, свойства копическихъ сѣченій, когда предположимъ, что поверхность теряетъ одно изъ своихъ измѣреній и обращается въ кривую линію. Но поверхности втораго порядка должны представлять не только всѣ особенности коническихъ сѣченій, но вслѣдствіе своей болѣе полной формы, о трехъ измѣреніяхъ, еще множество другихъ, исчезающихъ съ уничтоженіемъ одного изъ измѣреній; таковы напримѣръ *линіи кривизны*, которыя были въ пер-

вый разъ указаны Монжемъ и въ которыхъ Бине и Дюпенъ открыли потомъ замѣчательныя свойства [61]).

Ограничиваясь только тѣми свойствами поверхностей втораго порядка, которыя можно предвидѣть изъ простой аналогіи ихъ съ коническими сѣченіями, укажемъ напримѣръ на *фокусы* этихъ кривыхъ, представляющіе источникъ самыхъ красивыхъ и важныхъ ихъ свойствъ. Эти точки находятся также въ трехъ поверхностяхъ вращенія (въ растянутомъ эллипсоидѣ, гиперболоидѣ съ двумя полостями и параболоидѣ) и въ нихъ Дюпенъ открылъ также драгоцѣнныя свойства какъ для теоріи, такъ и для объясненія нѣкоторыхъ физическихъ явленій [62]). Безъ сомнѣнія это есть указаніе на то, что нѣчто подобное и притомъ болѣе общее должно имѣть мѣсто для всякой поверхности втораго порядка; но мы не знаемъ пытался-ли до сихъ поръ кто-нибудь изслѣдовать этотъ вопросъ.

Убѣжденные въ томъ, что такая теорія, соотвѣтствующая въ поверхностяхъ втораго порядка теоріи фокусовъ коническихъ сѣченій, будетъ новымъ источникомъ свойствъ интересныхъ и чрезвычайно полезныхъ для болѣе совершеннаго познанія этихъ поверхностей, мы избрали ее предметомъ своихъ изысканій. Аналогія между *фокусами* коническихъ сѣченій и извѣстными *прямыми* въ конусахъ втораго порядка [63]), проведенная нами довольно далеко, естественнымъ образомъ навела насъ на подобныя же свойства поверхностей, указавъ, что въ нихъ *кривыя* линіи должны играть роль прямыхъ въ конусѣ и точекъ въ коническихъ сѣченіяхъ. Въ Примѣчаніи XXXI предлагаемъ нѣсколько выводовъ, которые позволяютъ предположить, что мы нашли такую аналогію. Впослѣдствіи мы разчитываемъ издать нашу

---

[61]) Дюпену удалось, кромѣ другихъ прекрасныхъ результатовъ получить путемъ чисто-геометрическихъ соображеній механическое черченіе линій кривизны поверхностей втораго порядка. (*Journal de l'école polytechnique*, 14-e cahier).

[62]) *Applications de Géométrie*, in—4^0, 1818.

[63]) *Mémoire de Géométrie, sur les cônes du second degré.*

работу, теперь же сообщаемъ заранѣе первые результаты, выражая при этомъ искреннее желаніе, чтобы положенное нами начало привлекло вниманіе геометровъ и вызвало новыя работы объ этомъ предметѣ.

49. Есть еще другой вопросъ, отъ котораго также зависятъ будущіе успѣхи теоріи поверхностей втораго порядка и важность котораго была оцѣнена Брюссельскою Академіей. Это—аналогія, которая должна существовать между нѣкоторымъ еще неизвѣстнымъ свойствомъ этихъ поверхностей и знаменитою теоремою Паскаля въ коническихъ сѣченіяхъ [64]).

Эта теорема, независимо отъ различныхъ преобразованій, къ которымъ она способна, и понимаемая единственно со стороны свойственныхъ ей формы и изложенія, можетъ быть разсматриваема съ двухъ различныхъ точекъ зрѣнія. На нее можно смотрѣть, какъ на общее и постоянное соотношеніе между шестью произвольными точками коническаго сѣченія, т.-е. числомъ *на единицу большимъ* того, какое нужно для опредѣленія кривой; или же—какъ на общее свойство коническаго сѣченія относительно треугольника, произвольно помѣщеннаго въ плоскости кривой [65]).

Вслѣдствіе этого въ пространствѣ можно двоякимъ образомъ представлять себѣ аналогію съ теоремой Паскаля. Съ первой точки зрѣнія это будетъ общее свойство десяти точекъ поверхности втораго порядка, т.-е. числа *на единицу большаго,* чѣмъ то, которое нужно для опредѣленія поверхности; со второй же точки зрѣнія это будетъ общее свойство, вытекающее изъ сопоставленія поверхности втораго порядка съ тетраэдромъ какъ угодно помѣщеннымъ въ пространствѣ.

---

[64]) То, что мы говоримъ о теоремѣ Паскаля, относится также и къ теоремѣ Бріаншона, которая въ теоріи коническихъ сѣченій играетъ точно такую же роль.

[65]) Такой треугольникъ образуется напримѣръ сторонами нечетнаго порядка въ треугольникѣ Паскалевой теоремы и тогда теорема эта выражаетъ, что три хорды коническаго сѣченія, опредѣляемыя тремя углами треугольника, встрѣчаютъ соотвѣтственно три противоположныя стороны въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

Первый вопросъ, который долженъ быть особенно полезенъ для теоріи поверхностей втораго порядка, былъ предложенъ Брюссельскою Академіею въ 1825 году, но остался не рѣшеннымъ. На слѣдующемъ конкурсѣ Академія дала большій просторъ геометрамъ, приглашая просто найти для поверхностей втораго порядка теорему аналогическую теоремѣ Паскаля въ коническихъ сѣченіяхъ; здѣсь заключался и прежній вопросъ, но въ то же время предоставлялась полная свобода во взглядахъ на теорему Паскаля и на ту аналогію, которая въ этомъ отношеніи можетъ существовать между линіями и поверхностями втораго порядка.

Въ этомъ видѣ вопросъ Академіи не представляетъ такихъ трудностей, какъ прежде. Думаемъ, что онъ разрѣшается теоремой, которую мы предлагаемъ въ Примѣчаніи XXXII. Дѣйствительно, эта теорема выражаетъ общее свойство тетраэдра относительно поверхности втораго порядка, аналогичное съ свойствомъ треугольника относительно коническаго сѣченія, выражаемымъ теоремою Паскаля. Но отъ этой теоремы еще далеко до общаго соотношенія между десятью произвольными точками поверхности втораго порядка; изысканіе такого свойства достойно вниманія геометровъ. Нѣтъ сомнѣнія, что мы не имѣемъ еще всѣхъ элементовъ, необходимыхъ для подобнаго изысканія; въ этомъ мы видимъ поводъ изучать свойства поверхностей втораго порядка со всевозможныхъ сторонъ и во всевозможныхъ отношеніяхъ. Нельзя пренебрегать никакою теоріей, никакимъ открытіемъ, какъ бы ни казалось оно на первый взглядъ ничтожно; ибо всякая частная истина, если она и не имѣетъ непосредственнаго примѣненія, имѣетъ значеніе какъ звено въ непрерывной цѣпи, связывающей многочисленныя истины этой обширной теоріи; и можетъ быть въ этомъ именно звенѣ лежитъ зародышъ великихъ открытій, изъ которыхъ бытро разовьются методы обобщенія новѣйшей геометріи.

50. Полезнымъ подготовительнымъ трудомъ для полученія соотношенія между десятью точками поверхности было бы полное рѣшеніе во всевозможныхъ случаяхъ задачи о по-

строеніи поверхности втораго порядка, опредѣляемой девятью условіями, именно проходящей черезъ данныя точки и касающейся данныхъ плоскостей. Задача эта и сама по себѣ заслуживаетъ вниманія геометровъ. Однако до сихъ поръ только Ламе занимался однимъ изъ общихъ, представляемыхъ ею, случаевъ: этотъ искусный профессоръ опредѣлилъ элементы, достаточные для построенія поверхности втораго порядка, проходящей черезъ девять данныхъ точекъ [66]). Но изслѣдованіе общаго рѣшенія и разборъ слѣдствій и частныхъ случаевъ при этомъ встрѣчающихся требуютъ еще новыхъ изысканій.

Прежде чѣмъ серьезно приниматься за вопросъ о десяти точкахъ поверхности втораго порядка, можетъ быть было бы также полезно изслѣдовать общее соотношеніе между девятью точками кривой двоякой кривизны четвертаго порядка, представляющей пересѣченіе двухъ поверхностей втораго порядка. Такая кривая опредѣляется въ пространствѣ восемью точками и, слѣдовательно, между этими точками и девятою должно существовать постоянное соотношеніе, выражающее, что эта девятая точка лежитъ на кривой, опредѣляемой восемью первыми точками.

Но еще ранѣе представляется вопросъ о соотношеніи между семью точками кривой двоякой кривизны третьяго порядка, представляющей пересѣченіе двухъ гиперболоидовъ съ одною полостью, имѣющихъ общую образующую,—кривой, которая опредѣляется въ пространствѣ шестью произвольными точками. Этотъ вопросъ не представляетъ такихъ трудностей, какъ вышеуказанные, и кажется вполнѣ разрѣшенъ нами (См. Примѣчаніе XXXIII).

Можетъ быть, наконецъ, за основу и образецъ сравненія слѣдуетъ принимать не теорему Паскаля, но сдѣлать такія же попытки съ другими теоремами, выражающими подобно ей свойство шести точекъ коническаго сѣченія и представ-

---

[66]) *Examen des différents méthodes employées pour resoudre les problèmes de Géométrie*, in—8°, 1818.

ляющими ея слѣдствія или видоизмѣненія, какъ это показано въ Примѣчаніи XV. Мы предполагали, что одна изъ этихъ теоремъ, представляющая какъ бы особое выраженіе *ангармоническаго* свойства точекъ коническаго сѣченія (Прим. XV, n° 21), можетъ, при посредствѣ трехъ трансверсалей, произвольно проведенныхъ въ пространствѣ, повести къ искомому соотношенію между десятью точками поверхности втораго порядка. Наши первыя усилія оказались безплодны; но мы еще сохраняемъ нѣкоторую надежду на эту теорему и желали бы встрѣтить попытки извлечь изъ нея, что можно.

51. **Кривыя двоякой кривизны третьяго и четвертаго порядка.** Кривыя двоякой кривизны четвертаго и третьяго порядка, которыя естественнымъ образомъ встрѣчаются въ важномъ вопросѣ о десяти точкахъ поверхности втораго порядка, заслуживаютъ и по другимъ причинамъ изученія со стороны геометровъ. Сами эти кривыя, подобно поверхностямъ втораго порядка, могутъ представлять въ пространствѣ различныя аналогіи съ коническими сѣченіями и есть множество вопросовъ, въ которыхъ они встрѣтятся, если, не ограничиваясь въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ одними коническими сѣченіями, мы перейдемъ къ болѣе труднымъ вопросамъ, разрѣшаемымъ при помощи совокупности нѣсколькихъ поверхностей втораго порядка.

Кривыя, о которыхъ мы теперь говоримъ, изучены еще очень мало; мы знаемъ немногія общія свойства только кривыхъ четвертаго порядка, доказанныя Гашеттомъ, Понселе и Кетле. Гашеттъ разсматривалъ эти кривыя, какъ пересѣченіе двухъ конусовъ втораго порядка и изслѣдовалъ формы тѣхъ плоскихъ кривыхъ четвертой степени, которыя изъ нихъ получаются въ проложеніи или перспективѣ [67]).

Понселе, въ *Traité des propriétés projectives* (n° 616), доказалъ, что черезъ кривую четвертаго порядка, происходящую отъ пересѣченія двухъ поверхностей второй степени, можно вообще провести четыре конуса втораго порядка.

---

[67]) *Correspondance sur l'école polytechnique*, t. I, p. 368.

Наконецъ, Кетле показалъ, что, пролагая на плоскость кривую пересѣченія двухъ извѣстнымъ образомъ опредѣленныхъ поверхностей втораго порядка, можно получить всѣ плоскія кривыя третьяго порядка [68]). Эта теорема, полезная для полученія свойствъ плоскихъ кривыхъ третьяго порядка при помощи извѣстныхъ свойствъ кривыхъ двоякой кривизны четвертаго порядка и *обратно* [69]), можетъ быть представлена въ болѣе общемъ видѣ, причемъ ея примѣненія часто становятся болѣе удобными и обширными. Теорема эта можетъ быть высказана такъ: *кривая пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка даетъ въ перспективномъ проложеніи на плоскость изъ точки зрѣнія, помѣщенной на самой кривой,—всѣ кривыя третьяго порядка.*

52. Прекрасное предложеніе Кетле вызвало предположеніе, что проэкція, или вообще перспектива, линіи пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка можетъ дать всѣ плоскія кривыя четвертаго порядка и что для этого достаточно помѣстить точку зрѣнія внѣ этой линіи. Но мы можемъ, кажется, отвѣчать на этотъ вопросъ отрицательно и выразить въ слѣдующей теоремѣ особенность кривыхъ четвертаго порядка, получаемыхъ отъ перспективнаго проложенія линіи пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка: *такая кривая имѣетъ всегда (и вообще, если исключимъ частныя видоизмѣненія,) двѣ двойныя или сопряженныя точки, которыя могутъ быть и мнимыми.*

Эта теорема заслуживаетъ нѣкотораго вниманія, потому что изъ нея вытекаютъ новыя слѣдствія, находящіяся въ близкомъ отношеніи къ вопросамъ, занимающимъ геометровъ въ послѣднее время.

---

[68]) *Correspondance mathématique de Bruxelles*, t. V, p. 195.

[69]) Изъ того напримѣръ, что плоская кривая третьяго порядка имѣетъ вообще три точки перегиба, лежащія на одной прямой, заключаемъ: 1° что *черезъ любую точку кривой двоякой кривизны четвертаго порядка можно вообще провести три плоскости, прикасающіяся къ этой кривой въ трехъ другихъ точкахъ* и 2° что *три послѣднія точки лежатъ въ одной плоскости съ тою, черезъ которую были проводимы три плоскости.*

Изъ нея прежде всего заключаемъ, что кривая четвертаго порядка, происходящая отъ перспективы пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка, допускаетъ не болѣе восьми касательныхъ, проходящихъ черезъ одну произвольно взятую точку плоскости, тогда какъ въ общей кривой четвертаго порядка черезъ одну точку могутъ проходить двѣнадцать касательныхъ.

Изъ нея же слѣдуетъ, что развертывающаяся поверхность, описанная около двухъ поверхностей втораго порядка, будетъ не выше восьмаго порядка. Порядокъ такой поверхности въ точности еще не указанъ; Понселе замѣтилъ только что онъ не превосходитъ числа двѣнадцать [70]).

Приложенія теоремы, о которой мы говоримъ, могутъ быть очень многочислены, потому что часто встрѣчаются такія кривыя линіи, которыя могутъ происходить отъ перспективы или проэкціи пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка [71]).

---

[70]) *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, nº 103 *Crelle's Journal*, t. IV.

[71]) Такъ напримѣръ, овалы Декарта, или апланетическія линіи, суть стереографическія проэкціи линіи пересѣченія сферы съ конусомъ вращенія (теорема Кетле, см. Прим. XXI). Отсюда заключаемъ, что эти знаменитые овалы всегда имѣютъ двѣ *сопряженныя* мнимыя точки въ безконечности. Можетъ быть другимъ путемъ этого и нельзя бы было обнаружить, потому что до сихъ поръ при изысканіи особыхъ точекъ не обращалось вниманія на мнимыя рѣшенія, также какъ и на точки безконечно удаленныя, которыя часто ускользаютъ отъ анализа. Тѣ и другія однако принадлежатъ къ особенностямъ кривыхъ линій и должны играть важную роль въ ихъ теоріи.

Точно также лемнискаты, образуемыя основаніями перпендикуляровъ, опускаемыхъ изъ неподвижной точки на касательныя коническаго сѣченія, суть стереографическія проэкціи пересѣченія сферы съ конусомъ втораго порядка (теорема Данделена, см. *Nouveax mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. 4); изъ этого слѣдуетъ, что эти кривыя имѣютъ двѣ сопряженныя мнимыя точки въ безконечности. Извѣстно, что онѣ кромѣ того имѣютъ всегда третью, всегда дѣйствительную двойную, или сопряженную точку, именно—точку, изъ которой опускаются перпендикуляры на касательныя, и что кривыя эти допускаютъ не бо-

53. Имѣя въ виду говорить о кривыхъ двойкой кривизны третьяго и четвертаго порядка, мы начали со вторыхъ, потому что до сихъ поръ только ими, кажется, и занимались. Между тѣмъ кривыя третьяго порядка болѣе просты и болѣе доступны для изученія. Мы нашли, что они обладаютъ многими интересными свойствами и представляются въ очень многихъ вопросахъ. Здѣсь мы не можемъ излагать этотъ предметъ во всемъ подробнымъ развитіи, какое онъ допускаетъ.

Ограничимся замѣчаніемъ, что перспектива кривыхъ линій двоякой кривизны третьяго порядка не даетъ всѣхъ плоскихъ кривыхъ третьей степени, но только тѣхъ, которыя имѣютъ двойную, или сопряженную, или возвратную точку.

54. **Польза теоріи поверхностей втораго порядка.** Не будемъ болѣе распространяться о теоріи поверхностей втораго порядка и линій двоякой кривизны, происходящихъ отъ ихъ пересѣченія. Изъ сказаннаго нами достаточно видно, къ какому развитію способны эти ученія и какое обширное поле для изслѣдованій еще представляютъ они для геометровъ. Эти изслѣдованія мы считаемъ необходимыми для того, чтобы упрочено было дальнѣйшее развитіе геометріи и наукъ, порождаемыхъ примѣненіемъ геометріи къ физикѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, геометрія, какъ и всѣ другія положительныя знанія, подчинена условію, понуждающему умъ человѣческій твердо идти впередъ не иначе, какъ постепенно, и непремѣнно отъ простаго къ сложному; и, подобно тому, какъ коническія сѣченія, простѣйшія кривыя въ геометріи на

лѣе шести касательныхъ изъ одной точки. Къ этому заключенію я былъ приведенъ также и другими соображеніями, не выходящими изъ области плоской геометріи.

Многія другія кривыя четвертаго порядка имѣютъ также сопряженныя мнимыя точки въ безконечности; таковы спирическія линіи, т.-е. плоскія сѣченія кольцеобразной поверхности, кассиноида и другія.

плоскости, слѣдовало изучить подробно и глубоко, прежде чѣмъ переходить къ высшимъ задачамъ, такъ и въ геометріи трехъ измѣреній поверхности втораго порядкя являются простѣйшими формами, изученіе которыхъ есть необходимое средство для дальнѣйшаго движенія въ познаніи свойствъ пространства.

Что касается наукъ о явленіяхъ природы, то поверхности втораго порядка несомнѣнно должны встрѣчаться здѣсь во множествѣ вопросовъ и играть такую же важную роль, какъ въ планетной системѣ—коническія сѣченія. Въ наиболѣе ученыхъ физико-математическихъ изысканіяхъ анализъ уже обнаружилъ значеніе этихъ поверхностей; но на это столь благопріятное обстоятельство смотрятъ большею частію, какъ на случайное и второстепенное, не допуская, что оно можетъ быть стоитъ въ прямой зависимости отъ первоначальной причины явленія и представляетъ дѣйствительное, а не случайное, основаніе всѣхъ обстоятельствъ явленія.

Теперь,—когда чистая геометрія въ себѣ самой содержитъ средства для вывода раціональнымъ путемъ, безъ пособія трудныхъ вычисленій и преобразованій анализа, многочисленныхъ свойствъ поверхностей втораго порядка и для рѣшенія относящихся сюда вопросовъ—естественно думать, что и въ общихъ явленіяхъ изъ области физики, гдѣ эти поверхности должны играть весьма важную роль, можно будетъ достигать изъясненія и даже полной теоріи явленій путемъ прямаго разсужденія при помощи чистой геометріи, основываясь единственно на свойствахъ и общихъ законахъ явленія. Другими словами, можно думать, что *приложеніе геометріи къ физическимъ явленіямъ*—эта наука Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Маклорена, Стеварта, Ламберта,—пріобрѣтетъ въ усовершенствованной теоріи поверхностей втораго порядка полезное и плодотворное ученіе, которое дастъ ей новую силу послѣ почти вѣковой остановки. Мы не сомнѣваемся, что такой путь, всегда прямой и естественный, столь удовлетворяющій нашему уму, будетъ могущест-

венно содѣйствовать наукѣ, освящая ей путь и умножая открытія во всѣхъ областяхъ натуральной философіи [72]).

---

[72]) Только что вышедшій мемуаръ Пуансо о вращателбномъ движеніи тѣлъ представляетъ разительный примѣръ удобства и выгодъ геометрическаго метода, о которомъ мы говоримъ. Трудный вопросъ, стоившій впродолженіе цѣлаго вѣка стольких усилій самымъ знаменитымъ аналистамъ, изслѣдованъ здѣсь съ такою удивительною ясностію и простотою, что ими лучше всего можетъ быть уничтоженъ предразсудокъ, въ силу котораго за геометріей признается только древность происхожденія, а не характеръ ея заслугъ и ея научнаго назначенія,— отрицается ея способность къ развитію, причемъ геометрію уподобляютъ мертвому языку, безполезному и неспособному болѣе служить потребностямъ человѣческаго ума. Этому ошибочному взгляду, который можетъ только препятствовать прогрессу науки, мы позволимъ себѣ противопоставить слѣдующее мнѣніе знаменитаго автора *Mécanique analytique*, высказанное шестьдесятъ лѣтъ тому назадъ по поводу великихъ задачъ системы міра,—задачъ, въ которыхъ геометрія опередила анализъ: „Какія бы преимущества не представлялъ алгебраическій анализъ передъ геометрическими пріемами древнихъ, обыкновенно называемыми, хотя весьма не соотвѣтственно съ сущностью дѣла— *синтезомъ*, тѣмъ не менѣе существуютъ задачи, въ которыхъ эти пріемы предпочтительны какъ по особой ясности, такъ и по простотѣ и изяществу доставляемыхъ ими рѣшеній. Есть даже такіе вопросы, въ которыхъ алгебраическій анализъ кажется совсѣмъ недостаточнымъ и рѣшеніе которыхъ повидимому можетъ быть достигнуто только синтетическимъ путемъ“. (*Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques.* Nouveaux Mémoires de l'Academie de Berlin, 1773).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

СОДЕРЖАНІЕ МЕМУАРА *)

1. Начертательная геометрія Монжа перешла въ преподаваніе математики. Одинъ изъ геометровъ, особенно глубоко постигшій характеръ и метафизику науки, уже давно высказалъ желаніе, чтобы теорія трансверсалей Карно введена была въ элементы геометріи [1]; эта теорія оцѣнена большинствомъ профессоровъ, которые теперь включаютъ въ свои курсы ея важнѣйшія теоремы. Но другіе указанные нами выше методы еще разсѣяны по мемуарамъ, чтеніе которыхъ можетъ казаться долгимъ и труднымъ по причинѣ множества содержащихся въ нихъ новыхъ результатовъ. Въ этомъ, я думаю, заключается настоящая причина невниманія къ современной раціональной геометріи; вслѣдствіе весьма жалкаго недоразумѣнія думаютъ, будто бы она представляетъ хаосъ новыхъ предложеній, открытыхъ случайно, не имѣющихъ ни связи между собою, ни значенія для сколько-нибудь существеннаго развитія науки о пространствѣ.

Стараясь устранить это недоразумѣніе, мы сочли полезнымъ собрать всѣ частныя и разрозненныя предложенія и вы-

---

*) „Исторія Геометріи“ представляетъ какъ бы введеніе къ мемуару Шаля: *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie.*

Прим. перев.

[1]) „. . . Эта остроумная теорія *трансверсалей*, простыя и плодотворныя начала которой должны бы быть причислены къ элементамъ геометріи“. (Пуансо см. *Journal de l'école polytechnique,* 10-e cahier *Mémoire sur les polygones et les polyèdres).*

вести ихъ изъ немногихъ наиболѣе общихъ истинъ, находящихся въ соотношеніи съ указанными нами методами; это служило бы также подтвержденіемъ нашей классификаціи. Подобную работу мы озаглавили бы такъ: *Опытъ дополненій къ раціональной геометріи.* Ея главная задача есть догматическое изложеніе геометрическихъ методовъ и ихъ важнѣйшихъ приложеній. Къ этому мы присоединяемъ новую и чисто геометрическую теорію поверхностей втораго порядка и геометрическую же теорію плоскихъ кривыхъ третьяго порядка,—теоріи, съ которыми пора наконецъ ознакомиться; теперь это также необходимо для дальнѣйшихъ успѣховъ въ геометріи, какъ прежде необходимо было полное знаніе кривыхъ втораго порядка.

Матеріалы для подобной работы были нами болѣе или менѣе уже заготовлены, какъ это можно видѣть изъ разнообразныхъ примѣчаній оттуда заимствованныхъ для настоящаго сочиненія. Но, какъ и должно было случиться въ работѣ обнимающей столько разнообразныхъ изслѣдованій, предметъ оказался обширнѣе и для сколько нибудь удовлетворительнаго окончанія потребовалъ больше времени и болѣе широкой рамки, нежели мы думали сначала; такъ какъ продолжительная отсрочка представляетъ свои неудобства, то мы рѣшились написать сначала отдѣльно о различныхъ предметахъ, назначавшихся для сочиненія, предполагая впослѣдствіи возвратиться къ первоначальному намѣренію и желая вмѣстѣ съ тѣмъ, чтобы писатель болѣе искусный и болѣе способный повести дѣло съ успѣхомъ, предупредилъ насъ въ выполненіи предпріятія, которое мы считаемъ полезнымъ для науки.

2. Въ нашемъ мемуарѣ мы изслѣдуемъ методы второй и третьей группы и обнаруживаемъ два общія принципа, къ которымъ, какъ было уже сказано, приводятся всѣ эти методы и которые составляютъ основаніе двухъ общихъ ученій о *видоизмѣненіи* (*déformation*) и *преобразованіи* (*transformation*) фигуръ.

3. Эти два принципа мы доказываемъ прямо, отчего они получаютъ значеніе абсолютныхъ и отвлеченныхъ истинъ, независимыхъ ни отъ какого частнаго метода, который былъ бы нуженъ для ихъ оправданія или облегченія ихъ примѣненія въ частныхъ случаяхъ.

Принципы эти будутъ изложены, какъ было уже сказано, въ формѣ болѣе общей, чѣмъ всякій изъ частныхъ методовъ. Такое обобщеніе, нами сдѣланное, оказывается особенно полезнымъ въ принципѣ количественныхъ соотношеній, чрезвычайно простомъ и открывающемъ для вышеупомянутыхъ теорій множество новыхъ приложеній. При этомъ основаніемъ служитъ одно соотношеніе, къ которому всегда можно привести всѣ другія, именно соотношеніе, названное нами *ангармоническимъ отношеніемъ* четырехъ точекъ или пучка четырехъ прямыхъ. Это—единственный типъ всѣхъ соотношеній, способныхъ къ преобразованію на основаніи доказываемыхъ нами принциповъ. Законъ соотвѣтствія между данною фигурою и фигурою преобразованною состоитъ именно въ равенствѣ соотвѣтствующихъ ангармоническихъ отношеній.

Вслѣдствіе простоты этого закона и самой формы ангармоническаго отношенія, оно получаетъ чрезвычайно важное значеніе въ наукѣ о пространствѣ.

Иногда можетъ на первый взглядъ казаться, что какое-нибудь соотношеніе не подходитъ подъ формулу ангармоническаго отношенія; задача геометра должна состоять тогда въ томъ, чтобы привести данное соотношеніе къ этой формулѣ посредствомъ подготовительныхъ преобразованій, до извѣстной степени сходныхъ съ измѣненіемъ перемѣнныхъ и вообще съ преобразованіями, употребляемыми въ анализѣ.

4. Мы начинаемъ съ взаимнаго преобразованія, приложенія котораго представляются въ теоріи взаимныхъ поляръ, потому что другое преобразованіе (видоизмѣненіе) вытекаетъ изъ него, какъ естественное слѣдствіе, хотя по назначенію своему имѣетъ совершенно такую же общность. Принципъ взаимнаго преобразованія мы назовемъ, слѣдуя выраженію

Жергонна, принципомъ *двойственности*; фигуры же, находящіяся во взаимномъ соотношеніи по такому закону—*взаимными* (*corrélatives*) [2]).

Доказавъ принципъ, мы предлагаемъ различныя примѣненія его, которыя приводятъ къ новымъ предложеніямъ, выражающимъ нерѣдко совершенно новаго рода общія свойства кривыхъ линій на плоскости и двоякой кривизны, а также геометрическихъ поверхностей: потомъ мы даемъ самое общее какъ аналитическое, такъ и геометрическое, построеніе *взаимныхъ* фигуръ; наконецъ излагаемъ соотношеніе между нашимъ принципомъ и теоріею взаимныхъ поляръ и выводимъ изъ него различные другіе частные методы, которые также могли бы служить удобными средствами для примѣненія къ дѣлу этого принципа, еслибы онъ не былъ прямо и *a priori* доказанъ, какъ свойство, присущее пространственнымъ формамъ.

5. Между приложеніями принципа двойственности есть одно, на которое мы здѣсь обращаемъ особое вниманіе.

Бросая взглядъ на состояніе геометріи до того времени, когда начали употреблять теорію поляръ для преобразованія нѣкоторыхъ теоремъ, мы замѣчаемъ, что тогда знали очень мало истинъ, представлявшихъ взаимное соотвѣтствіе съ истинами извѣстными. Въ теоріи кривыхъ линій, напримѣръ, ни одному изъ общихъ свойствъ не было извѣстно взаимно-соотвѣтственнаго. Это обстоятельство доказываетъ, что аналитическій методъ Декарта, служившій ко множеству прекрасныхъ открытій, преимущественно въ теоріи кривыхъ ли-

---

[2]) Слово *corrélatif* употребляется въ тысячѣ различныхъ обстоятельствъ; поэтому желательно бы было имѣть другое прилагательное, произведенное отъ слова *dualité*. Мы думали замѣнить слово *dualité* словомъ *diphanie*, которымъ выражалась бы двойственность свойствъ, обнаруживаемая всѣми фигурами въ пространствѣ: принципъ двойственности мы назвали бы слѣдовательно *principe de diphanie*, а фигуры находящіяся во взаимномъ соотвѣтствіи по этому закону—*diphaniques*. Но мы не рѣшились ввести эти новыя названія вмѣсто общеупотребительныхъ.

ній, становится неприложимымъ, или по крайней мѣрѣ представляетъ весьма большія затрудненія, при попыткѣ выводить изъ него теоремы, непосредственно получаемыя по закону двойственности какъ взаимно соотвѣтственныя теоремамъ, доказываемымъ по способу Декарта. Принципъ двойственности даетъ въ этомъ отношеніи чистой геометріи неоспоримое преимущество передъ аналитической геометріей.

Но отсюда не слѣдуетъ заключать, что алгебра,—это удивительное орудіе, примѣнявшееся до сихъ поръ ко всѣмъ геометрическимъ соображеніямъ,—не можетъ оказывать помощи при изслѣдованіи новыхъ свойствъ пространства, ускользающихъ повидимому отъ пріемовъ Декарта. Скорѣе слѣдуетъ наоборотъ думать, что для примѣненія къ такой цѣли нужно только соотвѣтственно видоизмѣнить великую мысль Декарта, признавая за нею ея существенную черту—приложеніе алгебраическихъ символовъ къ представленіямъ пространства и формы.

Въ способѣ Декарта кривая разсматривается какъ совокупность точекъ, слѣдующихъ одна за другой по опредѣленному закону, и положеніе всѣхъ этихъ точекъ выражается постояннымъ соотношеніемъ между разстояніями каждой изъ нихъ отъ двухъ неподвижныхъ осей.

Нетрудно замѣтить, что въ *новой аналитической геометріи* кривая линія должна быть разсматриваема какъ огибающая всѣхъ своихъ касательныхъ, положеніе же этихъ прямыхъ должно выражаться однимъ уравненіемъ съ двумя перемѣнными, которыя каждою парою своихъ значеній опредѣляютъ одну изъ касательныхъ,

Принципъ двойственности непосредственно приводитъ къ этой *новой системѣ аналитической геометріи*, если его прилагать къ самымъ пріемамъ Декартовой геометріи и къ тѣмъ соотношеніямъ, которыя представляютъ уравненія кривыхъ линій, или поверхностей. Такую новую геометрію мы изложимъ коротко въ нашемъ мемуарѣ съ этой именно точки зрѣнія, т. е. какъ простое примѣненіе принципа двойственности, предполагая впослѣдствіи возвратиться къ этому пред-

мету, разработанному нами прямо, безъ помощи принципа двойственности, и почти такимъ же путемъ, какой принятъ при изложеніи аналитической геометріи.

Въ немногихъ словахъ мы уже прежде высказали, въ чемъ заключается наша новая *система координатъ* и дали нѣсколько ея приложеній (См. *Correspondance mathématique* de Quetelet, t. VI, p. 81). Наша работа была бы очень полезна, еслибы принципъ двойственности былъ неизвѣстенъ, такъ какъ она служила бы для прямаго доказательства теоремъ взаимно-соотвѣтственныхъ теоремамъ Декартовой геометріи; но теперь нѣтъ надобности спѣшить изданіемъ ея, потому что принципъ двойственности даетъ возможность мгновенно преобразовывать истины, получаемыя по способу Декарта.

Несмотря на это, намъ кажется, что *новая система аналитической геометріи* заслуживаетъ дальнѣйшаго развитія, пополняя собою вмѣстѣ съ ученіемъ о координатахъ Декарта дѣло, начатое великимъ философомъ на основаніи его глубокой мысли о примѣненіи алгебры къ геометріи.

6. Сказанное нами объ аналитической геометріи относительно свойствъ пространства, открываемыхъ посредствомъ принципа двойственности, прилагается до извѣстной степени и къ теоріи трансверсалей въ томъ видѣ, какъ она предложена Карно и какъ она примѣняется съ тѣхъ поръ впродолженіе тридцати лѣтъ. Теорія эта въ своемъ теперешнемъ видѣ не приложима къ доказательству многихъ теоремъ о кривыхъ линіяхъ и поверхностяхъ взаимно-соотвѣтствующихъ другимъ теоремамъ, въ этой теоріи доказываемымъ. Однако она приложима и къ взаимнымъ теоремамъ, если въ нихъ идетъ рѣчь только о прямыхъ линіяхъ, и это потому, что Карно включилъ въ свою теорію теорему Ивана Бернулли (или, лучше сказать, Чевы, какъ нами объяснено вь Примѣчаніи VI), которая есть взаимная теоремѣ Птоломея.

Подобнымъ же образомъ достаточно ввести въ теорію трансверсалей нѣкоторыя предложенія о кривыхъ линіяхъ и поверхностяхъ, чтобы сдѣлать ее прямо способною прилагаться къ обоего рода вопросамъ, которые должны теперь

представляться во всѣхъ геометрическихъ изысканіяхъ. Такія теоремы,—именно взаимныя теперешнимъ основнымъ предложеніямъ теоріи трансверсалей,—уже получены Понселе въ его приложеніяхъ теоріи взаимныхъ поляръ; этотъ искусный геометръ пользуется ими въ мемуарѣ: *Analyse des transversales appliquée á la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques* (См. Crelle's *Journal*, t. VIII).

7. **Польза начала двойственности для алгебры.** Мы показали, что принципъ двойственности распространяетъ свои приложенія на аналитическую геометрію, вводя въ нее новую систему координатъ; слѣдуетъ прибавить, что вліяніе и значеніе этого принципа могутъ простираться даже на самую алгебру, понимаемую въ совершенно отвлеченномъ смыслѣ. Этому не надобно удивляться: Монжъ на прекрасныхъ примѣрахъ показалъ намъ, что законамъ пространства и всѣмъ достаточно общимъ понятіямъ геометріи могутъ соотвѣтствовать соображенія и выводы чистой алгебры.

На примѣненія принципа двойственности къ алгебрѣ мы смотримъ съ двухъ точекъ зрѣнія. Вопервыхъ, какъ на средство для интеграціи во многихъ случаяхъ; во вторыхъ,—какъ на способъ получать различныя теоремы алгебры посредствомъ алгебраическаго выраженія нѣкоторыхъ геометрическихъ результатовъ.

Пояснимъ въ немногихъ словахъ это двоякое примѣненіе принципа двойственности къ алгебраическому анализу.

8. Данной поверхности соотвѣтствуетъ по принципу двойственности поверхность взаимная и каждому свойству первой поверхности соотвѣтствуетъ взаимное свойство второй.

Если первая поверхность выражена уравненіемъ (въ какой угодно системѣ координатъ), то геометрическія соотношенія, существующія между первою и второю поверхностью послужатъ для перехода отъ уравненій первой къ уравненію второй поверхности въ той же системѣ координатъ и обратно для перехода отъ уравненія второй къ уравненію первой. (Мы даемъ формулы въ Декартовыхъ координатахъ для этого

перехода.) Если первая поверхность выражена уравненіемъ съ частными дифференціалами, то ему найдется такое же соотвѣтственное для второй поверхности. Это второе уравненіе вообще будетъ отлично отъ перваго и можетъ легче поддаваться способамъ интеграціи. Если его можно интегрировать, то найдется конечное уравненіе второй поверхности, отъ котораго посредствомъ вышеупомянутыхъ формулъ перейдемъ къ уравненію первой поверхности, т. е. будемъ имѣть интегралъ предложеннаго уравненія съ частными дифференціалами.

Это тотъ самый способъ, который мы изложили подробно въ Примѣчаніи XXX въ примѣненіи къ *взаимнымъ* поверхностямъ Монжа и на который указали, какъ на предметъ теоріи этихъ поверхностей.

Способъ этотъ, разсматриваемый аналитически, независимо отъ всякихъ геометрическихъ соображеній, есть въ сущности ничто иное, какъ алгебраическое преобразованіе, въ которомъ соотношенія между соотвѣтственными перемѣнными указываются намъ *a priori* аналитическими выраженіями взаимнаго соотвѣтствія между фигурами, построенными по закону двойственности.

9. Пользоваться принципами двойственности для открытія теоремъ алгебры можно слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что на основаніи принципа двойственности найдена геометрическая теорема и что, пытаясь доказать эту теорему путемъ алгебры, т. е. по способу координатъ, мы встрѣчаемъ непреодолимыя затрудненія вслѣдствіе недостаточности современнаго анализа; тогда мы постараемся разъяснить затруднительный пунктъ, т. е. другими словами,— разъяснить то алгебраическое понятіе, которое необходимо должно быть допущено, чтобы получалось желаемое заключеніе. Это алгебраическое понятіе выразится алгебраическою теоремою, которая такимъ образомъ будетъ доказана посредствомъ геометріи.

Достаточно пояснить этотъ пріемъ примѣромъ.

Положимъ, что мы хотимъ доказать помощію способа координатъ такую теорему: *Если къ данной геометрической*

поверхности проведемъ всѣ касательныя плоскости, параллельныя данной плоскости, то центръ среднихъ разстояній точекъ прикосновенія будетъ всегда находиться въ одной и той же точкѣ пространства, каково бы ни было положеніе плоскости, къ которой параллельны проводимыя касательныя плоскости.

Координаты точекъ прикосновенія касательныхъ плоскостей опредѣляются изъ уравненія поверхности $F(x, y, z)=0$ и изъ двухъ уравненій

$$\frac{dF}{dx} + a.\frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + b.\frac{dF}{dz} = 0,$$

гдѣ a и b—два угловыя количества, опредѣляющія общее направленіе касательныхъ плоскостей. Исключая y и z изъ этихъ трехъ уравненій, получимъ уравненіе относительно x, корни котораго будутъ абсциссы точекъ прикосновенія. На основаніи изложенной теоремы сумма этихъ корней должна оставаться таже, каково бы ни было общее направленіе касательныхъ плоскостей, т. е. каковы бы ни были два параметра a и b. Отсюда получается такая теорема алгебры:

Если исключимъ изъ трехъ уравненій

$$F(x, y, z)=0, \quad \frac{dF}{dx} + a\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + b\frac{dF}{dz} = 0$$

перемѣнныя y и z, то сумма корней окончательнаго уравненія относительно x не будетъ зависѣть отъ коэффиціентовъ a и b.

Этого примѣра достаточно, чтобы видѣть, какъ прилагается принципъ двойственности къ нахожденію теоремъ алгебры.

10. **Приложеніе принципа двойственности къ динамикѣ.** На предыдущихъ страницахъ показаны приложенія принципа двойственности къ двумъ геометри-

ческимъ ученіямъ, именно къ способу координатъ Декарта и теоріи трансверсалей и къ алгебраической теоріи интегрированія уравненій съ частными дифференціалами, но идея двойственности можетъ распространяться и на другіе отдѣлы математики, преимущественно на динамику. Здѣсь не мѣсто говорить объ этомъ и мы отсылаемъ читателей къ Примѣчанію XXXIV.

11. **Принципъ гомографіи.** Вторая часть нашего мемуара посвящена другому общему принципу, именно принципу *видоизмѣненія* фигуръ *(déformation)*.

Фигуры, разсматриваемыя въ приложеніяхъ этого принципа, принадлежатъ къ одному роду, т. е. въ нихъ каждой точкѣ, каждой прямой, каждой плоскости одной фигуры соотвѣтствуетъ точка, прямая, плоскость на другой фигурѣ, какъ это бываетъ напримѣръ въ фигурахъ подобныхъ, или въ плоскихъ фигурахъ, изъ которыхъ одна есть перспектива другой; вслѣдствіе этого мы назовемъ такія фигуры *гомографическими*, принципъ же, о которомъ говоримъ, — принципомъ *гомографическаго видоизмѣненія*, или просто — *принципомъ гомографіи*.

12. Прежде чѣмъ говорить объ этомъ предметѣ, считаемъ нелишнимъ точнѣе опредѣлить философскій характеръ этого принципа и свойство его приложеній въ раціональной геометріи.

Примѣненіе принципа гомографіи. Первое назначеніе этого принципа заключается въ *обобщеніи* свойствъ пространства.

Отсюда вытекаютъ два рода примѣненій, къ которымъ онъ способенъ, потому что обобщеніе можетъ быть сдѣлано двоякимъ образомъ: оно можетъ относиться къ построенію и формѣ фигуры, или же оно можетъ касаться свойствъ фигуры.

Въ первомъ случаѣ предлагается такой вопросъ: *по извѣстнымъ свойствамъ нѣкоторой фигуры сдѣлать заключеніе о подобныхъ же свойствахъ въ фигурѣ того же рода, но болѣе общаго построенія.*

Напримѣръ,—изъ нѣкоторыхъ данныхъ свойствъ круга или сферы вывести соотвѣтственныя свойства коническихъ сѣченій или поверхностей втораго порядка.

Во второмъ случаѣ вопросъ таковъ: *зная нѣкоторые частные случаи неизвѣстнаго еще общаго свойства фигуры, вывести это общее свойство ея.*

Возьмемъ напримѣръ, три сопряженные діаметра поверхности втораго порядка; извѣстно, что сумма квадратовъ ихъ есть величина постоянная. Теорема эта вызываетъ слѣдующій вопросъ: дается поверхность втораго порядка и черезъ произвольную точку пространства проводятся три прямыя линіи; каковы должны быть условія построенія этихъ прямыхъ, чтобы въ частномъ случаѣ, когда точка взята въ центрѣ поверхности, онѣ представляли собою три сопряженные діаметра; и каково свойство этихъ прямыхъ, обращающееся въ такомъ частномъ случаѣ въ вышеуказанное свойство сопряженныхъ діаметровъ.

Понятны такимъ образомъ оба общіе вопроса, для которыхъ предназначается *гомографическое видоизмѣненіе.*

13. Первый изъ этихъ вопросовъ приводитъ къ несомнѣнному способу изысканія.

Дѣйствительно положимъ, что требуется доказать нѣкоторое свойство фигуры; выбираемъ изъ безчисленнаго множества *гомографическихъ* фигуръ ту, въ которой вслѣдствіе ея простоты или другихъ обстоятельствъ теорема становится очевидною или доказывается гораздо легче. Такъ, употребляя перспективу, приводили часто изслѣдованія свойствъ коническихъ сѣченій къ изслѣдованію свойствъ круга.

14. Съ точки зрѣнія втораго вопроса можно на *гомографическое видоизмѣненіе* смотрѣть, какъ на пріемъ, относящійся къ разряду обратныхъ способовъ. Здѣсь имѣется въ виду задача обратная той, какую мы ежеминутно разрѣшаемъ выводя изъ общей теоремы ея частныя слѣдствія. Съ такой точки зрѣнія принципъ гомографіи заслуживаетъ, кажется, нѣкотораго вниманія. Въ самомъ дѣлѣ, въ геометріи всегда легко переходить отъ истины къ ея слѣдствіямъ, предста-

вляющимъ истины менѣе общія, чѣмъ первоначальная, но не существуетъ еще правилъ обратныхъ для перехода отъ частныхъ истинъ къ болѣе общимъ. Индукція, аналогія и нѣкоторыя частныя соображенія безспорно могутъ въ извѣстныхъ случаяхъ навести насъ на путь къ болѣе общей истинѣ и даютъ возможность предвидѣть ее; но затѣмъ является совершенно инойвопросъ—доказательство угаданнойистины — и для этого мы не имѣемъ ни одного спеціальнаго метода. *Принципъ гомографіи* и разнообразныя видоизмѣненія изъ него вытекающія доставляютъ такого рода методъ, истинный методъ *обобщенія*, и его кажется только пытались до сихъ поръ ввести въ раціональной геометріи [3]). Понятна польза подобныхъ методовъ для ускоренія успѣховъ науки. Нѣтъ открытія сколько нибудь важнаго, котораго зачатки и нѣкоторые частные случаи не встрѣчались бы задолго ранѣе; но при помощи методовъ обобщенія они же могли бы вести къ открытію немедленно. Вотъ почему важно изыскивать и разработывать такого рода методы.

---

[3]) По поводу сказаннаго здѣсь осмѣлюсь указать на сходство въ въ одномъ отношеніи между этимъ методомъ и интегральнымъ исчисленіемъ. Цѣль того и другаго одинаковая: именно переходъ отъ того, что *произведено* изъ предмета къ самому предмету (d'une *dérivation* d'un objet à cet objet).

Когда дано количество, то мы умѣемъ всегда и тотчасъ же найти его дифференціалъ; но для вопроса обратнаго, по данному дифференціальному количеству или уравненію найти его интегралъ, общихъ способовъ не существуетъ. Подобнымъ же образомъ изъ даннаго общаго предложенія можно сейчасъ же вывести частные случаи и точно также не имѣемъ общаго способа для обратной задачи, когда по частному случаю неизвѣстнаго общаго предложенія требуется найти это послѣднее.

Сближеніе это покажется, быть можетъ, менѣе страннымъ, если мы прибавимъ, что отъ другихъ способовъ преобразованія фигуръ принципъ гомографіи отличается тою особенностію, что въ немъ, какъ и въ интегральномъ исчисленіи, дѣлается переходъ отъ *безконечнаго* къ *конечному*. Въ приложеніяхъ этого принципа чаще всего требуется свойства фигуры, имѣющей нѣкоторыя части въ безконечности, распространить на фигуры того же рода, но въ которыхъ эти части находятся на разстояніяхъ конечныхъ.

Въ мемуарѣ мы предлагаемъ различныя приложенія принципа гомографіи; одно изъ нихъ касается системы координатъ Декартовой геометріи и ведетъ къ новой, болѣе общей системѣ аналитической геометріи, которая можетъ служить для прямаго доказательства путемъ анализа предложеній, выводимыхъ по принципу гомографіи, какъ обобщенія теоремъ получаемыхъ способомъ Декарта.

16. **Методы вытекающіе изъ принципа гомографіи.** Общій принципъ гомографическаго видоизмѣненія заключаетъ въ себѣ нѣсколько частныхъ методовъ, которыми удобно пользоваться въ вопросахъ спеціальныхъ и менѣе общихъ. Укажемъ изъ нихъ три наиболѣе важные.

Первый методъ есть теорія гомологическихъ фигуръ Понселе, служащая, напримѣръ, для вывода изъ свойствъ сферы множества свойствъ поверхностей вращенія втораго порядка имѣющихъ фокусъ; мы пополняемъ ее принципомъ количественныхъ соотношеній, безъ чего эта изящная теорія не прилагалась бы ко многимъ вопросамъ и была бы неполна [4]).

Второй методъ представляетъ обобщеніе угловыхъ соотношеній и прилагается исключительно къ распространенію свойствъ сферы на поверхности вращенія втораго порядка, не имѣющія фокусовъ. До сихъ поръ ни одинъ изъ способовъ преобразованія не могъ примѣняться къ изысканіямъ этого рода.

Третій методъ прилагается къ весьма многочисленному классу свойствъ, относящихся къ геометріи мѣры, т. е. къ длинамъ, поверхностямъ и объемамъ фигуръ; это есть переводъ на языкъ чистой геометріи того аналитическаго способа, который мы уже употребляли для распространенія свойствъ сферы на поверхности втораго порядка. При помощи этого метода мы между прочимъ доказываемъ простымъ разсужде-

---

[4]) Принципъ количественныхъ соотношеній необходимъ, напримѣръ, для вывода метрическихъ свойствъ системы двухъ коническихъ сѣченій, начертательныя свойства которой даетъ Понселе; точно тоже можно сказать о теоріи барельефовъ, которыхъ метрическія свойства важны не менѣе свойствъ чисто начертательныхъ.

ніемъ извѣстныя прекрасныя, а также нѣкоторыя новыя, свойства сопряженныхъ діаметровъ поверхностей втораго порядка, свойства, которыя до сихъ поръ доказывались только посредствомъ анализа.

17. Вообще приложенія принципа гомографіи къ поверхностямъ втораго порядка приводитъ насъ естественнымъ образомъ ко множеству свойствъ, которыя не были еще найдены посредствомъ употребляющихся теперь аналитическихъ пріемовъ; эти приложенія покажутъ, можетъ быть, возможность основать полную и обширную теорію поверхностей втораго порядка на соображеніяхъ чисто геометрическихъ, безъ пособія вычисленій, какъ мы уже заявляли объ этомъ выше. Анализъ во многихъ другихъ обстоятельствахъ представляетъ безспорно прекрасныя и неизмѣримыя преимущества передъ геометріей; но здѣсь позволительно прибавить, что въ теоріи поверхностей втораго порядка онъ долженъ уступить методу геометрическому. Геометрическій путь здѣсь быстрѣе и плодотворнѣе, нежели путь вычисленія; онъ въ тоже время болѣе ясенъ, потому что, извлекая свои пособія изъ самой сущности предмета безъ всякихъ вспомогательныхъ соображеній, онъ яснѣе обнаруживаетъ связь между предложеніями, проникаетъ до ихъ источника и можетъ изъ какого-нибудь первоначальнаго соотношенія между фигурами дѣлать безконечное множество выводовъ, являющихся новыми предложеніями, которыя не всегда можно получить изъ аналитическихъ формулъ и преобразованій и которыя въ такомъ случаѣ потребовали бы особыхъ, часто долгихъ и трудныхъ доказательствъ [5]).

---

[5]) Въ *Mémoire sur les proriétés des cônes du second degré* мы уже показали примѣръ преимуществъ, которыя можетъ представлять геометрическій методъ передъ анализомъ въ теоріи поверхностей втораго порядка. Аналитическій путь не только не привелъ бы насъ къ различнымъ теоремамъ, полученнымъ нами посредствомъ геометрическихъ соображеній, но и доказывалъ бы ихъ не такъ просто и скоро; въ этомъ мы убѣдились, переводя наши первыя доказательства на языкъ анализа.

Прибавленіе: Отличительный характеръ излагаемыхъ нами принциповъ двойственности и гомографіи, проистекающій изъ употребленія въ нихъ *ангармоническаго* отношенія, заключается въ томъ, что по самому свойству этого отношенія всѣ получаемыя нами теоремы прилагаются почти всегда сами собою и къ фигурамъ на сферѣ. Такимъ образомъ оба эти принципа доставляютъ удобное и естественное средство переносить на сферическія фигуры всѣ свойства плоскихъ фигуръ и даже обобщать уже извѣстныя свойства сферическихъ фигуръ.

Напримѣръ, для данной сферической фигуры извѣстна была до сихъ поръ только единственная фигура, именно *дополнительная*, имѣющая то свойство, что *точкамъ* и *большимъ кругамъ* первой фигуры соотвѣтствуютъ на дополнительной—*большіе круги* и *точки*; но принципъ двойственности показываетъ, что кромѣ этой дополнительной фигуры можно начертить на сферѣ безчисленное множество другихъ, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ; принципъ двойственности указываетъ и способъ построенія такихъ фигуръ, между которыми фигура дополнительная есть не болѣе какъ частный случай.

Поэтому мы можемъ сказать, что принципы двойственности и гомографіи представляютъ настоящій раціональный методъ для распространенія на сферическія фигуры свойствъ плоскихъ фигуръ, однимъ словомъ,—для созданія геометріи сферы; и эта часть науки о пространствѣ можетъ теперь дѣлать быстрые и легкіе успѣхи.

18. Независимо отъ примѣненія къ доказательству и обобщенію свойствъ пространства, принципъ гомографіи представляетъ еще и третьяго рода выгоду, заключающуюся въ самомъ понятіи о *гомографіи* фигуръ. Дѣйствительно, изученіе двухъ гомографическихъ фигуръ и знаніе ихъ обоюдныхъ соотношеній представляютъ собою новыя геометрическія истины, изъ которыхъ, какъ слѣдствіе, можетъ вытекать множество извѣстныхъ теоремъ, а также можетъ получаться много новыхъ результатовъ, найти которые безъ помощи теоріи гомографическихъ фигуръ было бы очень трудно.

Такъ напримѣръ, мы можемъ сказать, что разнообразные способы образованія коническихъ сѣченій, данные Ньютономъ, Маклореномъ, Де-Виттомъ и др., и множество свойствъ этихъ кривыхъ,—свойствъ, не имѣющихъ повидимому между

собою ничего общаго, — суть непосредственныя слѣдствія теоріи гомографическихъ фигуръ (См. Прим. XV и XVI).

Свойства, обнаруживаемыя системою двухъ равныхъ или даже двухъ подобныхъ тѣлъ, помѣщенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, суть также слѣдствія этой теоріи. Эти свойства, еще не изслѣдованныя, весьма многочисленны и ведутъ къ различнымъ любопытнымъ теоремамъ о безконечно-малыхъ движеніяхъ и даже о конечныхъ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла [6]).

Въ нашемъ мемуарѣ мы разсматриваемъ гомографическое видоизмѣненіе фигуръ только какъ средство для доказательства и обобщенія теоремъ; другія же общія свойства этихъ фигуръ, нами здѣсь указанныя, предполагаемъ изложить въ особомъ сочиненіи.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

19. Послѣ изложенныхъ нами соображеній о свойствѣ и назначеніи принциповъ двойственности и гомографіи позволительно, кажется, думать, что если въ наукахъ о пространствѣ существуютъ великіе и плодотворные первичные законы,—подобные исчисленію безконечно-малыхъ въ анализѣ, соединившему въ себѣ и усовершенствовавшему всѣ пріемы квадратуръ и maxima, подобно въ механикѣ началу возможныхъ скоростей, изъ котораго Лагранжъ извлекъ всѣ другіе принципы, подобно великому закону Ньютона въ области небесныхъ явленій [7]),—то двѣ простыя теоремы геометріи, изъ

---

[6]) Приведемъ для примѣра слѣдующую теорему, которая можетъ входить въ начала практической механики: Можно всегда перевести твердое тѣло изъ одного положенія въ другое непрерывнымъ движеніемъ винта, къ которому тѣло было бы прикрѣплено. (См. *Bulletin universel des sciences*, novembre 1830; *Correspondance mathématique de Bruxelles* t. VII, p. 352.

[7]) Таково, безъ сомнѣнія, убѣжденіе лицъ, привыкшихъ ближе всматриваться въ свойства пространства, въ ихъ взаимную связь и особен-

которыхъ проистекаютъ принципы двойственности и гомографіи наиболѣе приближаются при современномъ состояніи геометріи къ такимъ великимъ, еще незвѣстнымъ намъ общимъ законамъ.

Дѣйствительно, эти двѣ теоремы въ своихъ непосредственныхъ слѣдствіяхъ обнимаютъ не только множество отдѣльныхъ истинъ, но цѣлые теоріи и методы, весьма важные и плодотворные.

Не входя въ подробности о приложеніяхъ этихъ теоремъ и о новыхъ путяхъ, открываемыхъ ими для геометрическихъ изысканій, замѣтимъ только, что первая теорема раздѣляетъ всѣ свойства пространства на два обширные класса; нѣтъ ни одного свойства, какъ бы оно обще ни было, котораго бы эта теорема не превращала въ другое, столь же общее въ своемъ родѣ.

Вторая теорема обобщаетъ всѣ частныя и разрозненныя истины, указываетъ ихъ взаимныя соотношенія, связываетъ ихъ между собою, приводя къ одной общей истинѣ; и эта теорема, также какъ первая, заключаетъ цѣлые методы въ своихъ безчисленныхъ слѣдствіяхъ.

20. Принципы двойственности и гомографіи съ различными изъ нихъ проистекающими методами, другіе способы преобразованія, указанные нами въ *Géométrie descriptive* Монжа,

---

но въ удивительную *непрырывность*, придающую имъ въ высшей степени характеръ растяжимости, не представляемый другими положительными науками, напримѣръ наукою чиселъ. Такое же мнѣніе о геометріи и ея будущности высказываетъ ученый, извѣстный своими трудами во многихъ отдѣлахъ математическихъ наукъ и занимающей несмотря на молодые годы, почетное мѣсто въ одной изъ первыхъ Академій Европы: „Очень жаль, пишетъ мнѣ г. Кетле, что большая часть современныхъ математиковъ имѣетъ такое неблагопріятное мнѣніе о чистой геометріи..... Мнѣ всегда казалось, что ихъ болѣе всего удерживаетъ предполагаемый ими недостатокъ общности въ геометрическихъ методахъ.... Но чья это вина, геометріи ли, или тѣхъ, кто ею занимается? Я очень склоненъ вѣрить, что существуютъ нѣкоторыя великія истины, которыя должны быть, такъ сказать, источникомъ всѣхъ другихъ, въ такомъ же родѣ, какъ принципъ возможныхъ скоростей въ механикѣ.“

въ *Géométrie perspective* Кузинери и въ теоріи стереографическихъ проэкцій, представляютъ вмѣстѣ съ теоріей трансверсалей самыя могущественныя ученія новѣйшей геометріи и сообщаютъ ей характеръ легкости и всеобъемлемости, отличающій ее отъ геометріи древнихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, эти способы преобразованія являются вѣрными средствами или, такъ сказать, формами, служащими для нахожденія по произволу сколькихъ угодно геометрическихъ истинъ.

Возьмемъ въ пространствѣ какую нибудь фигуру и одно изъ извѣстныхъ ея свойствъ, примѣнимъ къ этой фигурѣ который нибудь изъ способовъ преобразованія и прослѣдимъ различныя видоизмѣненія и преобразованія теоремы, выражающей упомянутое свойство; тогда получимъ новую фигуру и ея свойство, соотвѣтствующее данному свойству первой фигуры.

Такія средства новѣйшей геометріи умножать до безконечности геометрическія истины можно уподобить формуламъ и преобразованіямъ алгебры, которыя даютъ вѣрный и быстрый отвѣтъ на предложенные вопросы, или же—реактивамъ химика, которые вѣрнымъ и неизмѣннымъ образомъ вызываютъ превращенія въ подвергнутомъ имъ веществѣ; эти средства суть настоящія орудія, которыхъ не имѣла древняя геометрія и которыя составляютъ отличительную черту новой геометріи.

Въ геометріи древнихъ истины были разрознены; трудно было созидать и изобрѣтать новыя; не всякій, кто хотѣлъ, могъ сдѣлаться геометромъ-изобрѣтателемъ.

Теперь можетъ явиться кто угодно, взять какую нибудь извѣстную истину, подвергнуть ее различнымъ общимъ пріемамъ преобразованія; и онъ получитъ другія истины, новыя или болѣе общія, которыя въ свою очередь можно подвергнуть такому же преобразованію; такимъ образомъ можно умножать почти до безконечности число новыхъ истинъ, выводимыхъ изъ одной; правда не всѣ будутъ заслуживать

вниманія, но нѣкоторыя могутъ представлять интересъ и даже вести къ чему нибудь весьма общему.

И такъ, при современномъ состояніи науки всякій можетъ обобщать и дѣлать открытія въ геометріи; чтобы прибавить камень къ зданію уже нѣтъ надобности быть геніемъ.

Поэтому на современное состояніе геометріи можно смотрѣть, какъ на состояніе явнаго прогресса и быстраго совершенствованія; думаемъ, что теперь по справедливости можно сказать объ этой наукѣ то, что въ свое время считалось исключительнымъ характеромъ аналитической геометріи: „Духъ новой геометріи—постоянно возводить истины, какъ старыя, такъ и новыя, до возможно большей степени общности“ [8]).

КОНЕЦЪ ПЕРВАГО ТОМА.

---

[8]) Fontenelle, *Histoire de l'Académie des sciences* 1704, *sur les spirales à l'infini.*